

**IOANA BĂRBAT
ALEXANDRU DUMITRACHE**

**MATEMATICĂ
APLICATĂ
ÎN
TEHNICA
DE CALCUL**

IX

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVAȚĂMINTULUI

IOANA BĂRBAT

Dr. ALEXANDRU DUMITRACHE

MATEMATICĂ APLICATĂ ÎN TEHNICA DE CALCUL

clasa a IX-a

Manual pentru licee cu profil
de matematică și de matematică-fizică



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI

CUPRINS

Capitolul I

I. SISTEME DE NUMERAȚIE	5
I.1. Definirea sistemelor de numerație	5
I.2. Scrierea unui număr real într-un sistem de nume- rație	6
I.3. Sistemul de numerație în baza zece	8
I.4. Sistemul de numerație în baza doi	9
I.5. Sistemul de numerație în baza opt	11
I.6. Sistemul de numerație în baza șaisprezece	12
I.7. Trecerea numerelor dintr-o bază în alta	15
Exerciții și probleme	25

Capitolul II

II. PRELUCRAREA AUTOMATĂ A DATELOR	28
II.1. Informația și informatica	28
II.2. Codificarea informațiilor	29
II.3. Arhitectura și structura unui sistem de calcul	30
II.4. Limbaje de programare	32
II.5. Dezvoltare de programe	33
II.6. Informatica în România	34

Capitolul III

III. OPERAȚII ARITMETICE ȘI OPERAȚII LOGICE	37
III.1. Noțiuni introductive	37
III.2. Aproximantele numerelor reale	37
III.3. Procedee de aproximare a numerelor reale	38
III.4. Erori și tipuri de erori	41
III.5. Erori datorate modului de reprezentare	44
III.6. Inegalitățile fundamentale în aproximarea nu- merelor reale	45
III.7. Aproximante cu eroarea absolută mai mică sau egală cu $\frac{1}{10^k}$	47
III.8. Cifre sigure și cifre îndoielnice pentru o apro- ximantă dată	49
III.9. Determinarea erorilor relative maxime ale unei aproximante pe baza cifrelor sigure ale acesteia	51

III.10.	Determinarea numărului de cifre sigure ale unei aproximante când se cunoaște eroarea relativă maximă a ei	53
III.11.	Efectuarea sumelor și diferențelor cu aproximante	55
III.12.	Efectuarea produselor și cîiturilor cu aproximante	61
III.13.	Ridicarea la putere a aproximantelor	65
	Exerciții și probleme	67
III.14.	Operații logice	73
III.14.1.	Introducere	73
III.14.2.	Calculul propozițiilor	75
	III.14.2.1. Diagrame Euler-Venn	78
	III.14.2.2. Tautologii și contradicții	79
	III.14.2.3. Raționament	83
	III.14.2.4. Tipuri de raționamente	84
	Întrebări și exerciții	88
III.14.3.	Calculul predicatelor	90
	III.14.3.1. Calculul predicatelor ca dezvoltare a calculului propozițiilor	90
	III.14.3.2. Particularizarea unui predicat. Cuantificări	93
	III.14.3.3. Operații cu predicate	96
	III.14.3.4. Identități logice	98
	Întrebări și exerciții	103
	Bibliografie	106

SISTEME DE NUMERAȚIE

1.1. Definirea sistemelor de numerație

Pentru reprezentarea numerelor se aleg două mulțimi, una A de denumiri specifică fiecărei limbi și a doua B de simboluri distincte, numite cifre, între care să existe o corespondență biunivocă.

1.1.1. Definiție. Numărul $b > 1$ al cifrelor mulțimii B se numește baza sistemului de numerație. Numerele naturale c pentru care $0 \leq c \leq b - 1$ se numesc cifre în baza b .

Pentru scrierea numerelor în baza b se folosesc b semne distincte.

Fie N numărul de elemente ale unei mulțimi M . Vom grupa elementele lui M în submulțimi, având fiecare câte b elemente, obținind k_1 de astfel de submulțimi și încă o submulțime cu a_0 elemente cu $0 \leq a_0 < b$.

Putem scrie:

$$(1) \quad N = k_1 b + a_0.$$

Pentru cazul $N < b$, avem $k_1 = 0$ și deci nu se poate forma nici o submulțime cu b elemente. Avem $N = a_0$.

În cazul $k_1 < b$ păstrăm N sub forma $N = k_1 b + a_0$.

Pentru $k_1 \geq b$ procedăm cu k_1 întocmai cum am procedat anterior cu N găsim k_2 grupe de câte b submulțimi cu câte b elemente și a_1 submulțimi de câte b elemente, în care $0 \leq a_1 < b$.

Putem scrie pentru k_1 o relație analoagă cu (1), scrisă pentru N ,

$$(2) \quad k_1 = k_2 b + a_1.$$

Dar ținând seama de (1) și (2), avem

$$N = (k_2 b + a_1)b + a_0; \quad N = k_2 b^2 + a_1 b + a_0.$$

Dacă avem $k_2 \geq b$ continuăm procesul formării de grupe de submulțimi obținind k_3 grupe de câte b grupe de câte b submulțimi cu câte b elemente, și încă a_2 grupe de câte b grupe de submulțimi cu b elemente.

Se obține astfel:

$$N = [(k_3 b + a_2)b + a_1]b + a_0.$$

adică,

$$N = k_3 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b + a_0.$$

Continuând, prin același procedeu, deoarece mulțimea M are N elemente, se ajunge după un număr finit de pași la un $k_n = a_n$, unde $1 \leq a_n \leq b - 1$ și deci

$$(3) \quad N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0.$$

Un număr scris sub forma (3) se spune că este scris sub formă polinomială.

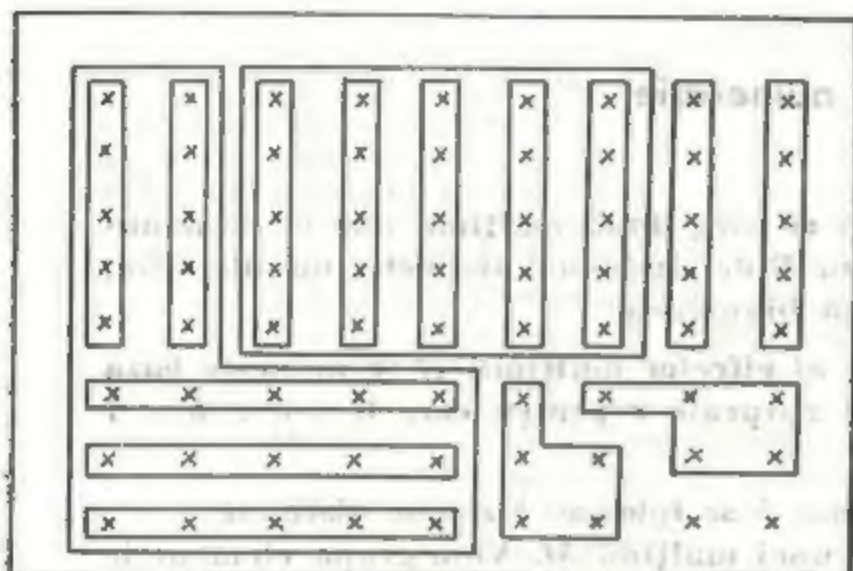


Fig. 1.1

Exemplu. În figura 1.1 mulțimea N este mulțimea tuturor punctelor încastrate iar $b = 5$. Se observă că $N = 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 2$.

Dacă baza b este precizată și nu există posibilitatea unor confuzii, atunci numărul N poate fi scris într-o formă mai simplă numai cu ajutorul simbolurilor $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ care formează fiecare o singură cifră și $a_n \neq$ astfel :

$$(4) \quad N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0.$$

Fiecare dintre cifrele $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ ocupă o anumită poziție indicată de exponentul bazei. Scrierea sub forma (4) mai poartă denumirea de scriere pozițională.

Introducem noțiunea de ordin al unei cifre care este indicat de exponentul bazei din produsul dintre cifră și o putere a bazei. În (4) cifra a_0 este cifra de ordinul zero, cifra a_1 este cifra de ordinul 1 și așa mai departe, cifra a_n este de ordinul n . În acest fel citirea numărului N se poate face și cifră cu cifră începînd de la stînga spre dreapta, adică de la ordinul cel mai mare n pînă la ordinul cel mai mic zero.

1.2. Scrierea unui număr real într-un sistem de numerație

În paragraful precedent s-a arătat cum se scrie un număr natural, într-o bază de numerație b oarecare. Se știe însă că orice număr întreg este de forma $\pm N$ unde N este număr natural. Deci pentru un întreg M oarecare, scrierea într-o bază dată b este :

$$(5) \quad M = \pm(a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0)$$

sau

$$(6) \quad M = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0(b).$$

Un număr real oarecare este suma dintre un număr întreg și un număr fracționar pozitiv, numite partea întreagă și partea fracționară, scriindu-se în ordine : partea întreagă, virgula și apoi partea fracționară*.

Exemple :

$$3 + 0,21 = 3,21 ;$$

$$-4 + 0,62 = \overline{4,62}.$$

Pentru numerele reale negative se utilizează frecvent scrierea în care semnul minus (—) scris la stînga numărului este atribuit și părții întregi și părții fracționare.

Exemplu :

$$\overline{5,24} = -5 + 0,24 = (-4) + (-1 + 0,24) = (-4) - (0,76) = -4,76.$$

De aceea, pentru claritatea înțelegerii, în cele ce urmează, vom numi întregii unui număr, partea de la stînga virgulei și parte fracționară (sau parte zecimală) partea de la dreapta virgulei, în toate cazurile în care avem același semn și pentru întregi și pentru partea fracționară.

Pentru un număr real oarecare x , care are și întregi și parte fracționară, vom avea o scriere de forma

$$(7) \quad x = \pm \left(a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0 + \frac{a_{-1}}{b} + \frac{a_{-2}}{b^2} + \dots + \frac{a_{-m}}{b^m} \right) + r_m,$$

unde

$$0 \leq a_i < b \text{ pentru orice } i = 0, 1, \dots, n, \text{ cu } a_n \neq 0$$

și

$$0 \leq a_{-j} < b \text{ pentru orice } j = 0, 1, \dots, m,$$

iar restul r_m verifică inegalitățile

$$0 \leq r_m < \frac{1}{b^m}.$$

Este necesar să introducem un semn de separare a întregilor de partea fracționară. În mod obișnuit se folosește virgula, numită și virgula zecimală, însă trebuie știut că se folosește și punctul, numit punct zecimal (în scrierea anglo-saxonă).

Deci un număr x cu $r_m = 0$ se scrie

$$(8) \quad x = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m} (b)$$

sau

$$x = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m} (b).$$

* Algebra cl. a IX-a, cap. III.

Exemple :

1) Numărul $257_{(b)}$, ($b > 7$), (se citește cifră cu cifră), se scrie

$$257_{(b)} = 2b^2 + 5b + 7.$$

2) Numărul $-586_{(b)}$, ($b > 8$), (se citește cifră cu cifră), se scrie

$$-586_{(b)} = -(5 \cdot b^3 + 8b + 6).$$

3) Numărul $x = 3b^2 + 7b + 4 + \frac{4}{b} + \frac{5}{b^2} + \frac{2}{b^4}$ scris în baza b ($b > 7$) este $x = 374,4502_{(b)}$.

1.3. Sistemul de numerație în baza zece

Sistemul de numerație în baza zece, numit și sistem zecimal, folosește zece cifre distincte date prin simbolurile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, cu ajutorul cărora putem scrie orice număr.

Orice număr natural mai mic decât zece se reprezintă prin una din aceste cifre și arată câte unități de ordinul zero are numărul.

Un număr natural N , mai mare sau egal cu zece, se va reprezenta printr-un șir de cifre în felul următor :

Numărul natural zece, egal deci cu numărul cifrelor bazei utilizate, se reprezintă prin 10 și se citește zece. Acest număr se numește unitate de ordinul întâi și reprezintă zece unități de ordinul zero.

Un număr care conține a_1 unități de ordinul întâi și a_0 unități de ordinul zero se scrie

$$a_1 a_0 = a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Un număr care conține 10 unități de ordinul întâi se scrie 100 și reprezintă o unitate de ordinul doi. Unitatea de ordinul doi este produsul între baza zece și unitatea de ordinul întâi

$$10 \cdot 10 = 10^2 = 100.$$

Un număr care conține a_2 unități de ordinul doi, a_1 unități de ordinul întâi și a_0 unități de ordinul zero se scrie astfel :

$$a_2 a_1 a_0 = a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Generalizînd, putem spune că un număr care conține 10 unități de ordinul k , se va numi unitate de ordinul $k + 1$ și se va scrie astfel :

$$10 \cdot 10^k = 10^{k+1} = 10 \dots 0.$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{k+1 \text{ cifre de zero}}$

Numărul ce conține a_n unități de ordinul n , a_{n-1} unități de ordinul $n - 1$ și așa mai departe, a_1 unități de ordinul întâi și a_0 unități de ordinul zero se scrie,

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

unde

$$0 \leq a_i \leq 9 \text{ pentru } i = 0, 1, \dots, n, \text{ cu } a_n \neq 0.$$

Ca și în cazul bazei b putem extinde scrierea în baza zece la numere reale.

Pentru un număr întreg M care este de forma $\pm N$, unde N este număr natural, avem scrierea :

$$M = \pm (a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0)$$

sau

$$M = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0,$$

iar pentru un număr real x oarecare, avînd și parte zecimală, avem :

$$x = \pm \left(a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0 + \frac{a_{-1}}{10} + \frac{a_{-2}}{10^2} + \dots + \frac{a_{-m}}{10^m} + \dots \right),$$

unde

$$0 \leq a_i \leq 9 \text{ pentru } i = 0, 1, \dots, n, \text{ cu } a_n \neq 0$$

și

$$0 \leq a_{-j} \leq 9 \text{ pentru } j = 0, 1, \dots, m, \dots$$

sau

$$x = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m} \dots$$

unde virgula separă întregii de partea zecimală.

La scrierea în baza zece de obicei nu se mai indică alăturat baza așa cum am procedat și în cazurile de mai sus.

1.4. Sistemul de numerație în baza doi

1.4.1. Scrierea numerelor în baza doi

Sistemul de numerație în baza doi, numit și sistem de numerație binar, este sistemul în care se folosesc cifrele 0 și 1.

Numerele naturale mai mici decît doi se vor scrie cu aceste cifre, respectiv „0” pentru zero și „1” pentru unu.

Baza de numerație fiind doi o vom nota $10_{(2)}$ și pentru un număr natural oarecare avem :

$$N = a_n 10_{(2)}^n + a_{n-1} 10_{(2)}^{n-1} + \dots + a_1 10_{(2)} + a_0,$$

unde

$$0 \leq a_i \leq 1 \text{ pentru } i = 0, 1, \dots, n-1 \text{ și } a_n = 1$$

sau

$$N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0_{(2)}$$

cu aceleași condiții pentru a_i și a_n .

Un număr care conține o unitate de ordinul zero se scrie $N = 1$.

Un număr care conține o unitate de ordinul întâi se scrie $N = 10_{(2)}$.

Un număr care conține o unitate de ordinul întâi și o unitate de ordinul zero se scrie

$$N = 11_{(2)}.$$

În general, o unitate de ordinul n conține două unități de ordinul $n-1$, adică $10_{(2)} \cdot 10_{(2)}^{n-1} = 10_{(2)}^n$, sau $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ în baza zece.

Folosind rezultatele date de formulele (7) și (8) din paragraful 1.2 pentru cazul $b = 2$, scriem un număr real x în baza doi sub forma :

$$x = \pm \left(a_n 10_{(2)}^n + a_{n-1} 10_{(2)}^{n-1} + \dots + a_1 10_{(2)} + a_0 + \frac{a_{-1}}{10_{(2)}} + \frac{a_{-2}}{10_{(2)}^2} + \dots + \frac{a_{-m}}{10_{(2)}^m} + \dots \right).$$

unde

$$0 \leq a_i \leq 1 \text{ pentru } i = 0, 1, \dots, n-1, a_n = 1$$

și

$$0 \leq a_{-j} \leq 1 \text{ pentru } j = 0, 1, \dots, m, \dots$$

sau

$$x = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m} \dots_{(2)}.$$

1.4.2. Operații cu numere scrise în baza doi

În general efectuarea operațiilor în baza doi nu se deosebește esențial de efectuarea operațiilor în baza zece. Se păstrează formele de așezare a numerelor pentru efectuarea operațiilor și numai tabelele de operații sînt altele. Deoarece urmărirea operațiilor cu numere scrise în binar devine mult mai ușoară dacă se cunosc tabelele de operații pentru adunare și înmulțire, le dăm pe acestea în continuare.

Tabelul 1.1

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Tabelul 1.2

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Să urmărim în continuare câteva exemple :

$$\begin{array}{rcl}
 1) \quad & \begin{array}{r} 11,111 \\ + 10,001 \\ \hline 110,000 \end{array} & 2) \quad \begin{array}{r} 100000,011 \\ + 1000,101 \\ \hline 10111,110 \end{array} \\
 3) \quad & \begin{array}{r} 11,01 \\ \times 1,011 \\ \hline 1101 \\ 1101 \\ 1101 \\ \hline 100,01111 \end{array} & 4) \quad \begin{array}{r} 1101,1 \\ \times 110 \\ \hline 110 \\ 110 \\ \hline 110 \end{array} \begin{array}{l} 110 \\ \hline 10,01 \end{array}
 \end{array}$$

1.5. Sistemul de numerație în baza opt

1.5.1 Scrierea numerelor în baza opt

Sistemul de numerație în baza opt, numit și sistem de numerație octal, este sistemul în care se folosesc opt cifre și anume, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 iar baza se notează cu ajutorul cifrelor „0” și „1” scriind $10_{(8)}$, dacă nu este posibilă o confuzie, în caz contrar scriind cu specificație $10_{(8)}$.

Avem :

$$N = a_n 10_{(8)}^n + a_{n-1} 10_{(8)}^{n-1} + \dots + a_1 10_{(8)} + a_0$$

unde

$$0 \leq a_i \leq 7 \text{ pentru } i = 0, 1, \dots, n \text{ cu } a_n \neq 0$$

sau

$$N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0_{(8)}$$

cu aceleași condiții pentru a_i și a_n .

Numerele mai mici decît opt se vor scrie cu cifrele indicate pentru această bază și vor fi numite unități de ordinul zero.

O unitate de un anumit ordin (în afară de ordinul zero) este egală cu opt unități de ordin inferior iar opt unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin superior, adică,

$$10_{(8)} = 10_{(8)}^{n-1} = 10_{(8)}^n \text{ sau în baza zece } 8 \cdot 8^{n-1} = 8^n$$

Formulele (7) și (8) din paragraful 1.2 pentru cazul $b = 8$ ne permit să scriem un număr real x în baza opt sub forma :

$$x = \left(a_n 10_{(8)}^n + a_{n-1} 10_{(8)}^{n-1} + \dots + a_1 10_{(8)} + a_0 + \frac{a_{-1}}{10_{(8)}} + \frac{a_{-2}}{10_{(8)}^2} + \dots + \frac{a_{-m}}{10_{(8)}^m} + \dots \right),$$

unde

$$0 \leq a_i \leq 7 \text{ pentru } i = 0, 1, \dots, n \text{ cu } a_n \neq 0$$

și

$$0 \leq a_j \leq 7 \text{ pentru } j = 0, 1, \dots, m, \dots$$

sau

$$x = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m} \dots_{(8)}$$

1.5.2. Operații cu numere scrise în baza opt

Și în baza opt, ca și în baza doi, efectuarea operațiilor nu se deosebește prea mult de efectuarea operațiilor în baza zece, deoarece se păstrează formele de așezare ale numerelor. Diferă numai tabelele de operații și de aceea pentru a da posibilitatea unei urmăririi mai ușoare le dăm în continuare:

Tabelul 1.3

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Tabelul 1.4

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Să urmărim mai jos câteva exemple de operații în octal.

$$\begin{array}{r} 1) \quad 547,317 + \\ 3250,715 \\ \hline 4020,234 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2) \quad 7456,625 - \\ 6767,546 \\ \hline 467,057 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3) \quad 26,5 \times \\ 32,4 \\ \hline 1324 \\ 552 \\ \hline 1037 \\ 1127,44 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b) \quad 30,6 \overline{)26} \\ 26 \\ \hline =26 \\ 26 \\ \hline \end{array}$$

1.6. Sistemul de numerație în baza șaisprezece

1.6.1. Scrierea numerelor în baza șaisprezece

Baza de numerație șaisprezece, numită și hexazecimală, folosește șaisprezece semne pentru cifrele bazei. Primele zece semne sînt cele cunoscute de la baza zece, iar în continuare sînt utilizate literele *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, care au următoarele semnificații:

- cifra *A* în sistemul hexazecimal reprezintă numărul 10 din sistemul zecimal;

— cifra B în sistemul hexazecimal reprezintă numărul 11 din sistemul zecimal ;

cifra C în sistemul hexazecimal reprezintă numărul 12 din sistemul zecimal ;

-- cifra D în sistemul hexazecimal reprezintă numărul 13 din sistemul zecimal ;

— cifra E în sistemul hexazecimal reprezintă numărul 14 din sistemul zecimal ;

— cifra F în sistemul hexazecimal reprezintă numărul 15 din sistemul zecimal.

Baza se notează cu ajutorul cifrelor „0” și „1” scriind 10, dacă nu este posibilă vreo confuzie ; în caz contrar baza se scrie cu specificație $10_{(10)}$.

Numerele naturale mai mici decât baza se vor scrie cu una din cifrele indicate.

Pentru un număr natural oarecare avem :

$$N = a_n 10_{(16)}^n + a_{n-1} 10_{(16)}^{n-1} + \dots + a_1 10_{(16)} + a_0,$$

unde

$$0 \leq a_i \leq F \text{ pentru } i = 0, 1, \dots, n \text{ cu } a_n \neq 0,$$

sau

$$N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0_{(16)}$$

cu aceleași condiții pentru a_i și a_n .

Orice unitate de un anumit ordin este egală cu șaisprezece unități de ordin inferior (cu excepția ordinului zero) iar șaisprezece unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin superior, adică

$$10_{(16)} \cdot 10_{(16)}^{n-1} = 10_{(16)}^n, \text{ sau în baza zece } 16 \cdot 16^{n-1} = 16^n.$$

Ca și în cazul celorlalte baze de numerație de pînă acum, putem aplica formulele (7) și (8) din paragraful 1.2 pentru cazul $b = 16$ și putem scrie un număr real x în baza șaisprezece sub forma,

$$x = \pm \left(a_n 10_{(16)}^n + a_{n-1} 10_{(16)}^{n-1} + \dots + a_1 10_{(16)} + a_0 + \frac{a_{-1}}{10_{(16)}} + \frac{a_{-2}}{10_{(16)}^2} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{a_{-m}}{10_{(16)}^m} + \dots \right),$$

unde

$$0 \leq a_i \leq F \text{ pentru } i = 0, 1, \dots, n \text{ cu } a_n \neq 0$$

și

$$0 \leq a_j \leq F \text{ pentru } j = 0, 1, \dots, m, \dots$$

sau

$$x = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m} \dots_{(16)}.$$

1.6.2. Operații cu numere scrise în baza șaisprezece

Și în hexazecimal operațiile se fac ca în bazele doi, opt sau zece. De aceea vom da mai întâi tabelele de operații pentru adunare și înmulțire.

Tabelul 1.5

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

Tabelul 1.6

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4C	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

Exemple de operații în hexazecimal.

$$\begin{array}{rcl}
 1) & \text{FFC,ED} + & 2) \quad \text{A02,B4} - \\
 & \underline{14\text{A,2B}} & \underline{87\text{B,FC}} \\
 & 1\ 147,18 & 186,\text{B8} \\
 \\
 3) & \text{A,7} \times & 4) \quad \text{C8} \left| \text{A} \right. \\
 & \underline{8,\text{C}} & \text{A} \left| \underline{14} \right. \\
 & 7\text{D4} & \underline{28} \\
 & 538 & \underline{28} \\
 & \underline{5\text{B,54}} & \underline{\quad}
 \end{array}$$

Sistemele de numerație binar, octal și hexazecimal precum și operațiile cu numere scrise în aceste sisteme sunt utilizate în toate problemele ce sunt rezolvate cu ajutorul calculatoarelor. Așa cum se va vedea în capitolele următoare, scrierea în sistemul binar asigură posibilitatea de introducere în calculator a datelor și comenzilor pentru faptul că utilizând doar două simboluri (0 și 1), acestea pot fi ușor modelate fizic.

1.7. Trecerea numerelor dintr-o bază în alta

1.7.1. Trecerea unui număr dintr-o bază în alta prin baza zece

Trecerea numerelor dintr-o bază de numerație în alta se mai numește și *conversie*. La tratarea acestei probleme putem presupune, pentru simplificare, că numărul este întreg sau chiar natural.

Fie N scris în baza b și vrem să-l scriem în baza β diferită de b . În general, trecerea de la o bază la alta se face prin intermediul bazei zece. De aceea vom scrie atât cifrele numărului N cât și baza b în baza zece.

Dacă numărul este :

$$(9) \quad N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0, \text{ cu } a_n \neq 0 \text{ și } i = 0, 1, \dots, n,$$

unde a_i scrise în baza zece sînt de forma

$$a_i = a'_{j_l} a'_{j_l-1} \dots a'_1 a'_0 \text{ cu } 0 \leq a'_l \leq 9 \text{ și } l = 0, 1, \dots, j_i,$$

iar baza b scrisă în bază zece are forma

$$b = a''_k a''_{k-1} \dots a'_1 a'_0 \text{ cu } 0 \leq a'_l \leq 9 \text{ și } a'_k \neq 0,$$

atunci înlocuind în (8) și efectuînd operațiile în baza zece obținem numărul sub forma

$$N = \bar{a}_m 10^m + \bar{a}_{m-1} 10^{m-1} + \dots + \bar{a}_1 10 + \bar{a}_0,$$

sau

$$N = \bar{a}_m \bar{a}_{m-1} \dots \bar{a}_1 \bar{a}_0.$$

Pentru exemplificare, să luăm

$$N = CD82_{(16)},$$

adică

$$N = C \cdot 10^3_{(16)} + D \cdot 10^2_{(16)} + 8 \cdot 10_{(16)} + 2.$$

Scriindu-i cifrele și baza în baza zece, avem

$$C = 12; D = 13; 8 = 8; 2 = 2; 10_{(16)} = 16.$$

Deci

$$N = 12 \cdot 16^3 + 13 \cdot 16^2 + 8 \cdot 16 + 2.$$

unde făcând calculele obținem:

$$N = 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 = 52\,610.$$

Pentru a trece numărul

$$N = \bar{a}_m \bar{a}_{m-1} \dots \bar{a}_1 \bar{a}_0$$

din baza zece în baza β trecem la numărarea unei mulțimi cu N elemente, N fiind scris în baza zece, formînd submulțimi de câte β elemente și grupe cu β submulțimi de câte β elemente etc.

Realizăm mai ușor această numărare scriind și baza β în baza zece și apoi efectuăm împărțirea lui N scris în baza zece la β scris în baza zece și apoi cîtlul obținut îl împărțim din nou la β scris în baza zece și așa mai departe.

Această operație se desfășoară după următorul algoritim:

$$N = k_1 \beta + \alpha_0, \quad 0 \leq \alpha_0 < \beta,$$

$$k_1 = k_2 \beta + \alpha_1, \quad 0 \leq \alpha_1 < \beta,$$

$$k_2 = k_3 \beta + \alpha_2, \quad 0 \leq \alpha_2 < \beta,$$

$$\dots$$

$$k_{p-1} = k_p \beta + \alpha_{p-1}, \quad 0 \leq \alpha_{p-1} < \beta,$$

$$k_p = 0 \cdot \beta + \alpha_p, \quad \alpha_p = k_p,$$

ultima împărțire efectuată fiind aceea în care $k_p < \beta$. Numărul N scris în baza β va fi deci

$$N = \alpha_p \alpha_{p-1} \dots \alpha_1 \alpha_0.$$

Exemplu :

Fie $N = 52\ 810$ în baza zece pe care să-l scriem în baza 8.

Putem utiliza o schemă de împărțire puțin modificată (fig. 1.2) astfel

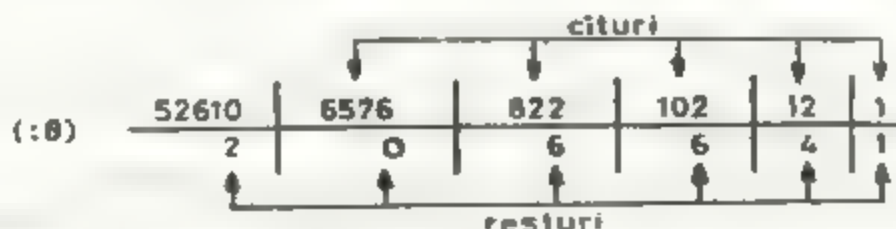


Fig. 1.2

Deci $52\ 810 = 146\ 602_{(8)}$.

1.7.2. Trecerea unui număr dintr-o bază b^k în baza b și invers

În trecerea de la baza b la baza β , un interes deosebit îl prezintă cazul în care între b și β există una dintre relațiile :

$$b = \beta^k \text{ sau } \beta = b^k.$$

Să presupunem că avem $\beta = b^k$.

În acest caz, numărul N dat de expresia

$$(10) \quad N = \alpha_m \beta^m + \alpha_{m-1} \beta^{m-1} + \dots + \alpha_1 \beta + \alpha_0$$

poate fi scris în baza b punind în locul bazei β pe b^k , iar cifrele α_i , ($i = 0, 1, \dots, m$) din baza β vor fi scrise în baza b .

Cifrele α_i scrise în baza b sînt numere cu k cifre de forma :

$$\alpha_i = \alpha_{i,k-1} b^{k-1} + \alpha_{i,k-2} b^{k-2} + \dots + \alpha_{i,1} b + \alpha_{i,0},$$

unde coeficienții $\alpha_{i,h}$, ($i = 0, 1, \dots, m$; $h = 0, 1, \dots, k-1$) sînt toți nuli sau nu după cum α_i au fost nuli sau nu, deoarece $0 \leq \alpha_i \leq \beta - 1$.

Înlocuind exprimările lui α_i în (10) se obține :

$$\begin{aligned} N = & (\alpha_{m,k-1} b^{k-1} + \alpha_{m,k-2} b^{k-2} + \dots + \alpha_{m,1} b + \alpha_{m,0}) b^{mk} + \\ & + (\alpha_{m-1,k-1} b^{k-1} + \dots + \alpha_{m-1,0}) b^{(m-1)k} + \dots + (\alpha_{1,k-1} b^{k-1} + \alpha_{1,k-2} b^{k-2} + \dots + \alpha_{1,1} b + \alpha_{1,0}) b^k + \\ & + (\alpha_{0,k-1} b^{k-1} + \alpha_{0,k-2} b^{k-2} + \dots + \alpha_{0,1} b + \alpha_{0,0}), \end{aligned}$$

adică

$$N = \alpha_{m,k-1} b^{mk+k-1} + \alpha_{m,k-2} b^{mk+k-2} + \dots + \alpha_{0,1} b + \alpha_{0,0}.$$

De unde rezultă că cifrele lui N în baza b sînt cele găsite pentru fiecare α_m din scrierea în baza β fără modificarea ordinii.

Am obținut deci următoarea

1.7.2.1. Regulă Pentru trecerea unui număr întreg N de la o bază b^k la baza b scriem fiecare dintre cifrele numărului N din baza b^k în baza b cu

apoiorul a exact k cifre în baza b , păstrînd ordinea cifrelor din scrierea în baza b^k și avînd grijă ca prima cifră din stînga a numărului obținut să fie nenulă.

Nu este greu de observat ca și trecerea inversă se face după următoarea

I.7.2.2. Regulă. Pentru a trece un număr întreg dintr-o bază b în baza b^k se grupează cifrele numărului scris în baza b în grupe de câte k cifre începînd de la dreapta spre stînga determinînd apoi pentru fiecare grupă cifra care corespunde scrierii ei în baza b^k .

Fără prea mare dificultate demonstrațiile pot fi extinse și la partea zecimală a unui număr real scrisă cu un număr finit de cifre zecimale și în acest caz regulile de la I.7.2.1 și I.7.2.2 aplicate părții zecimale cu începere de la virgulă spre dreapta ne produc trecerea unui număr real dintr-o bază b^k în baza b și invers.

1.7.3. Trecerea numerelor întregi din sistemul zecimal în sistemul binar și invers

Reamintindu-ne rezultatul obținut în paragraful 1.7.1 putem repede reconstitui algoritmul de trecere de la baza 10 la baza 2 și anume :

1.7.3.1. Regulă. Pentru trecerea unui număr întreg din baza 10 în baza 2 se împarte numărul scris în baza 10 la 2 găsindu-se restul 0 sau 1, apoi cîtlul obținut se împarte iar la 2 găsindu-se restul 0 sau 1 și așa mai departe, pînă cînd ultimul cît obținut va fi 0, deci ultimul rest este egal cu 1. Cifrele care reprezintă resturile, luate în ordinea inversă obținerii, formează numărul căutat.

Exemple :

Să se facă conversia din baza 10 în baza 2 a numerelor ,

a) 75 ; b) -379.

Pentru calcul utilizăm o așezare ca în figura 1.3.

$$a) (2) \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|} 75 & 37 & 18 & 9 & 4 & 2 & 1 & & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & \end{array} ; 75 = 1001011_{(2)}$$

$$b) (2) \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|} 379 & 189 & 94 & 47 & 23 & 11 & 5 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} ; -379 = -101111011_{(2)}$$

Fig. 1.3

Pentru conversia din baza 2 în baza 10 folosim scrierea :

$$N = a_n 10_{(10)}^n + a_{n-1} 10_{(10)}^{n-1} + \dots + a_1 10_{(10)}^1 + a_0.$$

Știind că $10_{(2)} = 2$ și că oricare a_i este cifra 0 sau 1 aceeași și în baza zece deducem :

$$N = \sum_{i=0}^n a_i 2^i.$$

1.7.4. Trecerea părții fracționare a unui număr din sistemul zecimal în sistemul binar și invers

Fie x numărul ce reprezintă o parte fracționară în sistemul zecimal pe care vrem să o trecem în binar. Scrierea în binar a lui x , avînd $10_{(2)}$ exprimat în baza zece, deci $10_{(2)} = 2$, este :

$$x = \frac{a_{-1}}{2} + \frac{a_{-2}}{2^2} + \dots + \frac{a_{-m}}{2^m}.$$

Dacă înmulțim pe x cu 2 obținem :

$$2x = a_{-1} + \frac{a_{-2}}{2} + \dots + \frac{a_{-m}}{2^{m-1}}.$$

Se observă că prima cifră de la partea fracționară a_{-1} , devine cifră de la partea întreagă a numărului înmulțit cu 2. Este ușor acum de continuat. După înmulțiri succesive cu 2 putem pune în evidență pe rînd cifrele de la partea fracționară a numărului scris în baza 2. Avem așadar :

1.7.4.1. - *Regulă* Pentru determinarea cifrelor din scrierea unei părți fracționare la trecerea din baza zece în baza doi, se înmulțește numărul cu 2 și partea întreagă a numărului obținut va fi prima cifră de după virgulă a numărului scris în binar, apoi se înmulțește cu 2 partea fracționară a produsului obținut anterior și partea întreagă a noului rezultat va fi a doua cifră de după virgulă a numărului scris în baza 2 ș.a.m.d.

Menționăm că și în baza 2 pot fi părți fracționare periodice.

Exemplu :

Să se facă conversia din zecimal în binar a numărului 0,375.
Utilizăm schema din figura 1.4.

$$\begin{array}{r} \text{a)} \quad (-2) \begin{array}{c|c|c|c} 375 & 750 & 50 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \quad ; \quad 0,375 = 0,011_{(2)} \\ \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \hline \text{partea întreagă} \end{array} \end{array}$$

Fig. 1.4

Pentru trecerea de la baza 2 la baza 10 considerăm scrierea numărului x , parte fracționară, în baza 2

$$x = \frac{a_{-1}}{10_{(2)}} + \frac{a_{-2}}{10_{(2)}^2} + \dots + \frac{a_{-m}}{10_{(2)}^m}$$

în care trecem pe $10_{(2)}$ în baza zece și avem $10_{(2)} = 2$, iar cifrele numărului x din baza 2 au aceeași semnificație și în baza zece. Urmează că

$$x = \frac{a_{-1}}{2} + \frac{a_{-2}}{2^2} + \dots + \frac{a_{-m}}{2^m},$$

adică

$$x = \sum_{i=1}^m \frac{a_{-i}}{2^i}.$$

Exemplu :

Să se facă conversia din binar în zecimal pentru numărul $0,01011_{(2)}$.

Avem :

$$0,01011_{(2)} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} = \frac{11}{32} = 0,34375.$$

Observație : Dacă un număr are și întregi și parte fracționară, atunci conversia se face separat pentru fiecare parte, apoi se reconstituie numărul din părțile transformate.

Exemplu :

$$\begin{aligned} 42,13 &= 42 + 0,13 = 101010_{(2)} + 0,00(10000101000111101011)_{(2)} = \\ &= 101010,00(10000101000111101011)_{(2)} \end{aligned}$$

unde grupul de cifre în paranteze de la partea fracționară reprezintă perioada acestui număr în baza 2.

1.7.5. Trecerea numerelor întregi din sistemul zecimal în sistemul octal sau hexazecimal și invers

Bazându-ne pe același rezultat obținut în paragraful 1.7.1 putem reconstitui algoritmul de trecere de la baza 10 la baza 8 sau 16 ca și în cazul bazei 2. Putem prelua regula 1.7.3.1 în care în locul bazei 2 avem în vedere baza 8 sau 16 în rest totul rămâne neschimbat.

Exemplul tratat la 1.7.1 folosind figura 1.2 arată trecerea de la baza zece la baza opt.

Pentru trecerea de la baza zece la baza șaisprezece considerăm numărul 583 și folosind o așezare ca în figura 1.2 avem :

$$(16) \overline{\overline{\overline{\begin{array}{r|l} 583 & 7 \\ \hline 7 & 36 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline 2 & 2 \end{array}}}}; \quad 583 = 247_{(16)}$$

Conversia inversă, de la baza 8 sau 16, la baza 10 se face folosind scrierea

$$N = a_n 10_{(8)}^n + a_{n-1} 10_{(8)}^{n-1} + \dots + a_1 10_{(8)} + a_0$$

pentru baza 8, iar pentru baza 16

$$N = a_n 10_{(16)}^n + a_{n-1} 10_{(16)}^{n-1} + \dots + a_1 10_{(16)} + a_0.$$

Trecînd atît cifrele a_i cît și baza $10_{(8)}$ respectiv $10_{(16)}$ în baza 10 se obține pentru baza 8

$$N = a'_n 8^n + a'_{n-1} 8^{n-1} + \dots + a'_1 8 + a'_0$$

iar pentru baza 16

$$N = a''_n 16^n + a''_{n-1} 16^{n-1} + \dots + a''_1 16 + a''_0,$$

unde cifrele a'_i sînt numerele rezultate din trecerea cifrelor a_i din baza 8 în baza 10 iar a''_i numerele rezultate din trecerea cifrelor a_i din baza 16 în baza 10.

Rezultă pentru trecerea din baza 8 în baza 10

$$N = \sum_{i=0}^n a'_i 8^i$$

iar pentru trecerea din baza 16 în baza 10

$$N = \sum_{i=0}^n a''_i 16^i.$$

Exemple :

a) Să se facă conversia din octal în zecimal a numărului

$$N = 547_{(8)}.$$

Rezolvare :

$$547_{(8)} = 5 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 7 = 359.$$

b) Să se facă conversia din hexazecimal în zecimal a numărului

$$N = FA81_{(16)}.$$

Rezolvare :

$$FA81_{(16)} = 15 \cdot 16^3 + 10 \cdot 16^2 + 8 \cdot 16 + 1 = 64129.$$

1.7.6. Trecerea părții fracționare a unui număr din sistemul zecimal în sistemul octal și invers

Dacă x este partea fracționară a numărului scris în sistemul zecimal, și vrem să o scriem în octal, folosim scrierea lui x în octal, unde baza $10_{(8)}$ se scrie în baza zece, adică $10_{(8)} = 8$ și avem :

$$x = \frac{a_1}{8} + \frac{a_2}{8^2} + \dots + \frac{a_m}{8^m}.$$

Înmulțind pe x cu 8 se obține :

$$8x = a_{-1} + \frac{a_{-2}}{8} + \dots + \frac{a_{-m}}{8^{m-1}}$$

unde se observă că prima cifră de la partea fracționară devine singura cifră a părții întregi a numărului obținut prin înmulțirea cu 8. Repetind înmulțirea, se poate continua determinarea cifrelor de la partea fracționară a numărului. Procedeu fiind analog cu cel de la baza 2, putem utiliza regula de la I.7.4.1 unde în locul bazei 2 avem baza 8.

De asemenea, facem sublinierea că și în baza 8 putem avea părți fracționare periodice.

Exemplu :

Să se facă conversia din zecimal în octal a numărului 0,484375.

Utilizăm o schemă ca la baza 2 și avem :

$$(8) \frac{484375}{0} \mid \frac{875}{9} \mid \frac{0}{7} ; 0,484375 = 0,37(8)$$

Trecerea inversă, din octal în zecimal, o deducem din :

$$x = \frac{a_{-1}}{10_{(8)}} + \frac{a_{-2}}{10_{(8)}^2} + \dots + \frac{a_{-m}}{10_{(8)}^m}$$

Trecind pe $10_{(8)}$, în baza zece avem $10_{(8)} = 8$ și trecind și cifrele numărului x din baza 8 în baza 10 deducem

$$x = \frac{a'_{-1}}{8} + \frac{a'_{-2}}{8^2} + \dots + \frac{a'_{-m}}{8^m}$$

unde a'_i sînt exprimările cifrelor a_i din baza 8 în baza 10, care de fapt coincid. Deci

$$x = \sum_{i=1}^m \frac{a_{-i}}{8^i}$$

Exemplu :

Să se facă conversia din octal în zecimal pentru numărul : 0,178₍₈₎.

Avem :

$$0,178_{(8)} = \frac{1}{8} + \frac{7}{8^2} + \frac{6}{8^3} = \frac{63}{256} = 0,24609375.$$

Observație. Cînd numărul asupra căruia se cere conversia are și întregi și parte zecimală, se aplică separat conversia fiecărei părți și apoi se reconstituie numărul din părțile transformate.

1.7.7. Trecerea părții fracționare a unui număr din sistemul zecimal în sistemul hexazecimal și invers

Ca și în celelalte cazuri de trecere a unui număr, parte fracționară, din baza zece în altă bază vom folosi forma numărului scrisă în hexazecimal. Baza fiind $10_{(16)} = 16$ și numărul fiind x avem :

$$x = \frac{a_{-1}}{16} + \frac{a_{-2}}{16^2} + \dots + \frac{a_{-m}}{16^m}.$$

Înmulțindu-l pe x cu 16 se obține :

$$16x = a_{-1} + \frac{a_{-2}}{16} + \dots + \frac{a_{-m}}{16^{m-1}}$$

unde se observă că prima cifră de la partea fracționară devine singura cifră a părții întregi a numărului obținut prin înmulțirea cu 16. Repetind înmulțirea, se poate continua determinarea cifrelor de la partea fracționară a numărului. Procedul fiind analog cu cel de la baza 2, putem utiliza regula de la 1.7.1.1 unde în locul bazei 2 avem baza 16.

De asemenea, facem sublinierea că în baza 16 putem avea părți fracționare periodice.

Exemplu :

Să se facă conversia din zecimal în hexazecimal a numărului 0,235.

Utilizăm o schemă ca la baza 2, deși se operează mai greu

$$(16) \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 235 & 76 & 16 & 56 & 96 & 36 & 76 \\ \hline 0 & 3 & 6 & 2 & 8 & F & 5 \end{array} : 0,235 = 0,3(C28F5)_{(16)}$$

Se observă că după șase înmulțiri succesive ale părții fracționare cu 16, a apărut aceeași parte fracționară care face să se repete cifrele întregilor obținuți prin înmulțire în continuare. Este deci o parte fracționară periodică.

Trecerea inversă, din hexazecimal în zecimal, o deducem din forma numărului scris în hexazecimal

$$x = \frac{a'_{-1}}{10_{(16)}} + \frac{a'_{-2}}{10^2_{(16)}} + \dots + \frac{a'_{-m}}{10^m_{(16)}}.$$

Trecând pe $10_{(16)}$ în baza zece avem $10_{(16)} = 16$ și trecând și cifrele numărului x din baza 16 în baza zece deducem :

$$x = \frac{a'_{-1}}{16} + \frac{a'_{-2}}{16^2} + \dots + \frac{a'_{-m}}{16^m},$$

unde a'_i sînt exprimările cifrelor a_i în baza zece.

$$x = \sum_{i=1}^m \frac{a'_i}{16^i}.$$

Exemplu :

Să se facă conversia din hexazecimal în zecimal pentru numărul :

$0,2F8_{(16)}$.

Avem :

$$0,2F8_{(16)} = \frac{2}{16} + \frac{15}{16^2} + \frac{8}{16^3} = \frac{700}{4096} = \frac{95}{512}.$$

Observație. Când numărul asupra căruia se cere conversia are și întregi și parte zecimală, se aplică separat conversia fiecărei părți și apoi se reconstituie numărul din părțile transformate.

Exemplu :

$$36,15_{(10)} = 36 + 0,15 = 24_{(16)} + 0,22(6)_{(16)} = 24,22(6)_{(16)}.$$

1.7.8. Trecerea numerelor din sistemul binar în sistemul octal și hexazecimal și invers

Pentru această trecere folosim rezultatele de la paragraful 1.7.2 și anume regulile de la 1.7.2.1 și 1.7.2.2 extinse la numere reale.

Deoarece avem $8 = 2^3$, respectiv $16 = 2^4$, urmează că se vor forma grupe de câte trei, respectiv patru cifre începînd de la virgulă spre stînga și spre dreapta și apoi fiecare grupă de trei, respectiv patru cifre, din baza doi va constitui o cifră în baza opt, respectiv șaisprezece (dacă ultimele grupe formate nu au trei, respectiv patru cifre, se va completa grupa cu zerouri la stînga sau la dreapta după cum împărțirea în grupe s-a făcut la stînga sau la dreapta virgulei).

Pentru ușurință, dăm tabela cu grupele de trei, respectiv patru cifre în binar și echivalentele lor în octal și hexazecimal.

Tabelul 1.7

Baza 2	Baza 8	Baza 2	Baza 16	Baza 2	Baza 16
000	0	0000	0	1000	8
001	1	0001	1	1001	9
010	2	0010	2	1010	A
011	3	0011	3	1011	B
100	4	0100	4	1100	C
101	5	0101	5	1101	D
110	6	0110	6	1110	E
111	7	0111	7	1111	F

Exemple :

1. Să se facă conversia din binar în octal și apoi în hexazecimal a numerelor .

a) 1101110101 ; b) 111,011.

Pentru baza 8 formăm grupe de trei cifre la stînga și la dreapta virgulei și cu ajutorul tabelului 1.7 în locul fiecărei grupe de trei cifre scriem cifra corespunzătoare în octal.

$$a) 1101110101_{(2)} = 001.101.110.101_{(2)} = 1565_{(8)}$$

$$b) 111,011_{(2)} = 7,3_{(8)}.$$

Pentru baza 16 formăm grupe de cîte patru cifre și folosind tabelul 1.7 ca în cazul bazei 8 avem :

$$a) 1101110101_{(2)} = 0011.0111.0101_{(2)} = 375_{(16)}$$

$$b) 111,011_{(2)} = 0111,0110_{(2)} = 7,6_{(16)}.$$

2. Să se facă conversia din octal în binar pentru numerele :

a) 547₍₈₎ ; b) 3,25₍₈₎.

Avem :

$$a) 547_{(8)} = \underbrace{101}_5 \underbrace{100}_4 \underbrace{111}_7 \quad (2)$$

$$b) 3,25_{(8)} = \underbrace{011}_3, \underbrace{010}_2 \underbrace{101}_5 \quad (2).$$

3. Să se facă conversia din hexazecimal în binar a numerelor .

a) 7AC ; b) B,0A.

Rezolvare :

$$a) 7AC_{(16)} = \underbrace{0111}_7 \underbrace{1010}_A \underbrace{1100}_C \quad (2) :$$

$$b) B,0A_{(16)} = \underbrace{1011}_B, \underbrace{0000}_0 \underbrace{1010}_A \quad (2).$$

EXERCIIII ȘI PROBLEME

1. Fiecare din următoarele operații aritmetice este corectă în cel puțin un sistem de numerație. Să se determine bazele posibile ale acestor sisteme.

$$a) 1\ 234 + 5\ 432 = 6\ 666 ;$$

$$g) \sqrt{51} = 6 ;$$

$$b) \frac{41}{3} = 13 ;$$

$$h) \sqrt{31} = 4 ;$$

$$c) \frac{33}{3} = 11 ;$$

$$i) \sqrt[3]{11} = 2 ;$$

$$d) 23 + 44 + 14 + 32 = 223 ;$$

$$j) \sqrt{21} = 3 ;$$

$$e) \frac{302}{20} = 12,1 ;$$

$$k) \sqrt{61} = 7 ;$$

$$f) \sqrt{41} = 5 ;$$

$$l) \sqrt{a1} = a + 1, a \in \mathbb{N}, a \geq 1.$$

2. Se știe că :

a) $10_{(10)} = 100_{(b)}$;

b) $292_{(10)} = 1\,204_{(b)}$.

Să se determine b .

3. Să se arate că :

a) 121 este pătrat perfect în orice bază $b > 2$;

b) 1 331 este cub perfect în orice bază $b > 3$;

c) 14 641 este puterea a 4 a a unui număr, oricare ar fi baza $b > 6$;

d) $(x1)_{(b+2)}$ este pătrat perfect oricare ar fi baza $b = x + 2$.

4. Să se efectueze în baza 2 :

a) $101001 + 110111 + 111010$;

b) $110001111 - 100011$;

c) $1101011 - 11011$;

d) $1111011,01 + 111011,101 + 11,011$;

e) $10000,001 - 10,011$;

f) $110110,1011 \cdot 101101,011$;

g) $11011011,011 : 1,1$.

5. Dându-se în baza 2 numerele :

$a = 1001,11001$;

$b = 1111,00011$;

$c = 1010,10101$;

să se calculeze :

1° $a + b - c$; 2° $a - b + c$; 3° $-a + b + c$; 4° $\frac{a + b}{c}$; 5° $\frac{bc}{a}$;

6° $\frac{a + b + c}{abc}$.

6. Să se efectueze în baza 16 :

a) $ABCDEF + FEDCBA + 12\,345 + 54\,321$;

b) $BEC - AC + FAC$;

c) $AB1 \cdot 7A$;

d) $B4 : 6$;

e) $18A,36 + 0,A72 + D,A5$;

f) $FA,2 \cdot 2,3D$.

7. Se dau în baza 16 următoarele numere :

$a = 12A,25$;

$b = 108,4E$;

$c = FF,34$.

Să se calculeze :

1° $4a + 3b - 2c$; 2° $3a - 2b + 4c$; 3° $-2a + 4b + 3c$.

8. Să se treacă următoarele numere dintr-o bază în alta prin intermediul bazei 10.

a) $1\,342_{(6)} = x_{(7)}$; b) $1\,804_{(9)} = x_{(4)}$; c) $32,3_{(6)} = x_{(4)}$

9. Să se facă conversia de la baza 3 la baza 9 a numerelor :
 $12\,101\,102$; $211\,022$; $1\,021$.

10. Să se facă conversia de la baza 9 la baza 3 a numerelor :
 $7\,568$; $237,463$.

11. Să se facă conversia de la baza 2 la bazele 4, 8 și 16 a numerelor :
 1110111101001 ; $110011,01011$.

12. Să se facă conversia de la baza 4 la baza 16 a numerelor :
 $313\,312\,001$; $1\,230\,231,13201$.

13. Să se facă conversia de la baza 16 la bazele 8, 4 și 2 a numerelor :
 $1AB5D8F$; $DE4A,19A3$.

14. Să se facă conversia de la baza 10 la baza 2 a numerelor :
 $7\,539\,432$; $0,5735$; $4\,726,875$.

15. Să se facă conversia de la baza 2 la baza 10 a numerelor :
 1001101 ; $0,11101$; $11,0101$.

16. Să se facă conversia de la baza 10 la baza 16 a numerelor :
 $5\,379$; $0,8475$; $325,75$.

17. Să se facă conversia de la baza 16 la baza 10 a numerelor :
 $A0FD$; $0,ABC$; $2E,125$.

18. Numărul 1 000, scris în baza 10, să fie scris în toate bazele de la 2 la 16 (în afară de zece în care se află deja scris).

Indicații și răspunsuri

1. a) $b \geq 7$; b) 8; c) $b \geq 4$; d) 5; e) 4; f) 6; g) 7; h) 5; i) 7; j) 4; k) 8; l) $a + 2$. 2. a) $b = 4$; b) $b = 6$. 3. a) $121 = b^2 + 2b + 1 = (b + 1)^2$; b); c); d). analog cu a). 4 - 5. Se folosesc tabelele I.1 și I.2. 6 - 7. Se folosesc tabelele I.5 și I.6. 8. a) $x_{(7)} = 435_{(7)}$; b) $x_{(4)} = 111\,211_{(4)}$; c) $x_{(4)} = 110,2_{(4)}$; 9 - 13. Se folosesc exemplele de la I.7.8 și regulile de la I.7.2.1 și I.7.2.2. 14 - 17. Se folosesc exemplele de la I.7.4 și I.7.5.

PRELUCRAREA AUTOMATĂ A DATELOR

II.1. Informația și informatica

Mulțimea și diversitatea informațiilor din lumea actuală („explozia informațională”) și dezvoltarea impetuoasă a tehnicii de calcul, au dus la apariția unei noi științe — *informatica*. Termenul de informatică a fost introdus în 1968, fiind sugerat de asocierea informație—automatică. Inițial, informatica a fost definită ca știința prelucrării informației, îndeosebi cu mijloace automate.

Deci obiectul acestei noi științe îl constituie informația. Dar ce este informația ?

S-a încercat definirea informației în diferite moduri, de exemplu :

- fiecare dintre elementele noi, în raport cu cunoștințele prealabile, cuprinse în semnificația unui simbol sau a unui grup de simboluri ;
- formulă scrisă, susceptibilă de a aduce o cunoștință ;
- comunicare, știre, veste ;
- expresie a unui mesaj, prin care se exprimă starea unui fenomen dintr-o anumită activitate, reprezentată printr-un număr, un cuvânt sau un șir de caractere convenționale.

Diferite definiții ale informației reliefează aspecte specifice ale acestei noțiuni. Astfel, distingem : *aspectul semantic*, reflectând cunoașterea, sens atribuit unei anumite reprezentări, *aspectul sintactic*, reprezentând forma căreia i se poate atribui un sens și *aspectul de comunicare*.

Pentru a putea fi percepută, informația trebuie reprezentată pe un suport de informație.

Prin *suport de informație* se înțelege orice mediu material care poate suferi transformări temporare sau permanente, în vederea reprezentării informației. Astfel, creierul uman, moleculele de acizi nucleici, undele sonore și electromagnetice, hirtia de scris, tabla, banda de magnetofon sînt numai cîteva exemple de suporturi de informație.

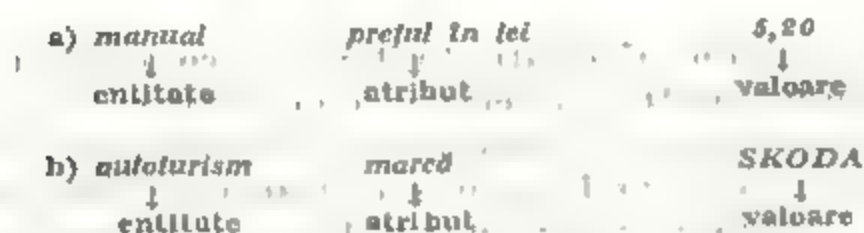
În procesul de prelucrare a informațiilor participă *date*, sensul informației fiind exprimat sau extras din acestea.

11.2. Codificarea informațiilor

Informația semantică poate fi considerată ca un ansamblu de trei elemente :

- *entitatea* (obiectul informației) ;
- *atributul* (element de descriere a entității respective, proprietate sau caracteristică a obiectului) ;
- *valoarea* (măsură a atributului).

De exemplu :



O entitate poate avea mai multe atribute, fiecareua corespunzându-i mai multe valori. De exemplu, entitatea autoturism poate avea pe lângă atributul marcă și atributele culoare, proprietar.

Pentru a reprezenta informațiile se recurge la *codificare*.

Un *cod* se definește prin : *alfabet, structură gramaticală (sintaxă) și atribuire semantică*.

Alfabetul este o mulțime finită de simboluri (semne) numite *caractere* (de exemplu, literele de la A la Z, cifrele 0, ..., 9).

Sintaxa reprezintă ansamblul regulilor de formare a șirurilor de simboluri care aparțin limbajului de codificare respectiv.

Semantica reprezintă semnificația șirurilor de caractere construite respectând regulile sintactice.

Construcțiile realizate cu caracterele din alfabet se numesc *cuvinte* (coduri). Cuvintele se constituie în cadrul unui *format*, ceea ce implică limitarea caracterelor utilizabile pentru anumite poziții din cuvânt sau restricții referitoare la ordinea lor. Lungimea cuvintelor poate fi fixă (toate cuvintele au același număr de caractere) sau variabilă.

Dacă formatul limitează lungimea codurilor la n caractere și alfabetul are m caractere distincte, atunci numărul total de coduri distincte care se pot forma este m^n .

Operația inversă codificării se numește *decodificare*.

În prelucrarea automată a datelor se folosesc *coduri binare* (alfabetul este format din două caractere, notate 0 și 1). Codificarea binară a fost impusă de faptul că funcționarea unui calculator se bazează pe elemente cu două stări stabile.

II.3. Arhitectura și structura unui sistem de calcul

Un calculator electronic este un ansamblu de componente electronice, programabil, care poate memora date și efectua cu ele operații (de exemplu, aritmetice și logice).

Pentru a stabili funcțiile pe care trebuie să le îndeplinească un calculator în vederea prelucrării datelor, vom utiliza analogia cu prelucrarea datelor de către om.

Într-adevăr, creierul uman, împreună cu restul sistemului nervos, constituie unul din cele mai complexe sisteme de prelucrare a datelor. El posedă în permanență informații asupra sa și asupra modificărilor care apar în lumea înconjurătoare.

Prin organele de simț recepționăm informații din lumea înconjurătoare. Acestea sînt stocate de memoria noastră; intervine apoi inteligența care comandă un proces de gîndire prin care se valorifică informațiile, după anumite reguli de prelucrare. Rezultatele prelucrării sînt transmise din nou memoriei. Cunoștințele astfel cîpătate le comunicăm lumii exterioare fie prin vorbire, fie prin scriere, acțiuni, gestică. Schematic, acest proces este reprezentat în figura II.1.

În principiu, un calculator electronic trebuie să fie capabil să îndeplinească aceleași funcții ca și calculatorul uman, adică :

- *introducerea datelor* (de exemplu, citirea lor de pe cartele perforate) ;
- *memorarea datelor* ;
- *prelucrarea datelor* ;
- *controlul prelucrării* ;
- *extragerea datelor* (de exemplu, imprimarea rezultatelor sau afișarea lor pe un ecran).

În vederea realizării acestor funcții un sistem de calcul cuprinde echipamente de calcul (hardware) și un sistem de programe (software).

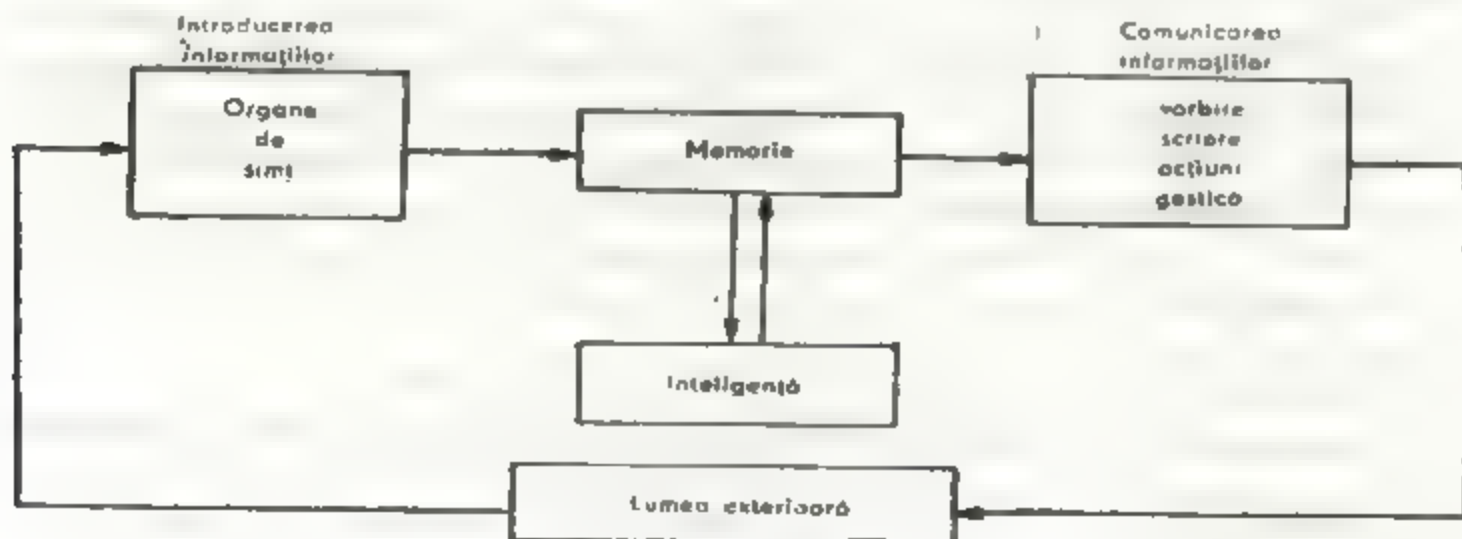


Fig. II.1

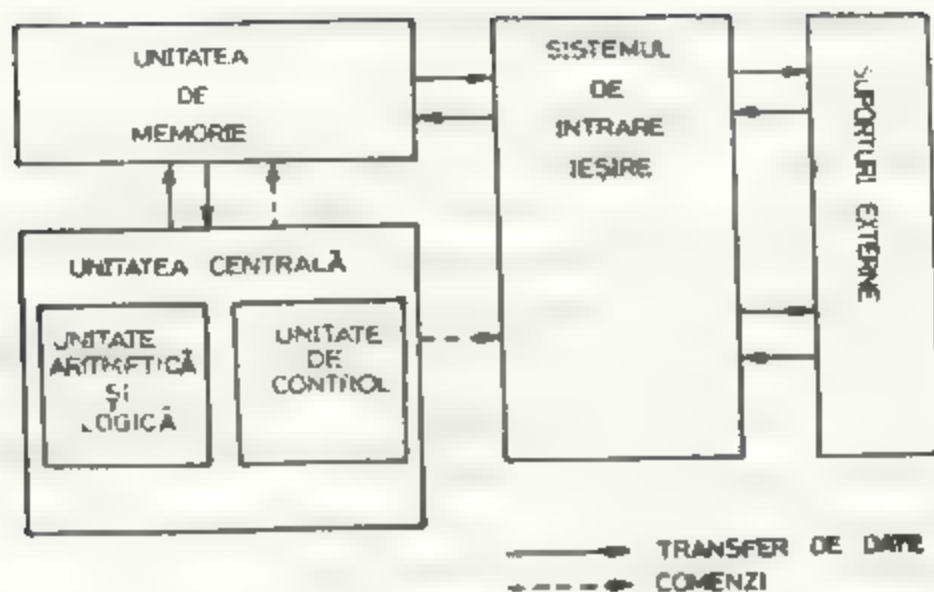


Fig. 11.2

Echipamentele de calcul componente sînt descrise în figura 11.2.

Unitatea de memorie asigură păstrarea datelor (programe, date de prelucrat, rezultate ale prelucrării) care participă într-un proces de prelucrare, înregistrarea și restituirea datelor la cererea celorlalte unități ale calculatorului. Memoria este constituită dintr-un ansamblu de elemente numite *celule binare*.

Cantitatea de informație ce poate fi înregistrată într-o celulă de memorie se numește *bit*, unui bit fiindu-i asociată valoarea 0 sau 1. Celulele binare sînt grupate în *locuți de memorie*. Fiecare locuție se identifică printr-un număr, care indică poziția ei în memorie. Acest număr se numește *adresă*. Prin intermediul adresei se realizează *accesul* la informațiile din memorie.

Informația dintr-o locuție se numește *octet* sau *baît* (1 octet = 8 biți). 1 024 octeți constituie 1 kilooctet (1 K).

Numărul maxim de octeți ce pot fi înregistrați în memorie determină *capacitatea memoriei*.

Intervalul de timp între emiterarea unei cereri de acces la informații din memorie și momentul rezolvării ei se numește *timp de acces* (de obicei mai mic de 1 μ sec).

O memorie este cu atît mai performantă cu cît are o capacitate mai mare și un timp de acces mai mic.

Unitatea centrală asigură prelucrarea propriu-zisă și comandă funcționarea celorlalte componente. Unitatea centrală dispune și de un *panou de comandă*, constituit dintr-un ansamblu de beculețe și comutatoare, care permite dialogul dintre operatorul la calculator și sistem. O parte din aceste funcții pot fi realizate și cu ajutorul altei componente — *consola operator*.

Sistemul de intrare ieșire asigură schimbul de informații între mediul exterior și calculator.

În cadrul unui sistem de calcul distingem două categorii de suporturi de informație :

- *suporturi interne*, încorporate în echipamentele de calcul (de exemplu, memoria internă, registrele unității centrale) și

- *suporturi externe*, utilizate pentru înregistrarea datelor de intrare sau a datelor de ieșire sau pentru înregistrarea și păstrarea pe o perioadă mai mare de timp a unor date aferente unui proces de prelucrare. Cele mai utilizate suporturi externe de informații sînt : cartela perforată, banda de hîrtie perforată, hîrtia de imprimat, banda magnetică și discul magnetic. Suporturile externe sînt exploatate prin intermediul unor echipamente speciale, numite *echipamente periferice* sau *dispozitive periferice*.

Sistemul de programare este la rîndul lui alcătuit din două componente : sistemul de operare și programele de aplicație.

Sistemul de operare cuprinde o mulțime de programe avînd rolul de a mări performanțele calculatorului prin furnizarea de facilități care nu sînt prevăzute de hardware. De exemplu, asigură încărcarea automată a programelor în memorie, traducerea în limbaj mașină a programelor scrise în limbaje simbolice, controlează execuția programelor și detectează automat unele tipuri de erori etc.

Programele de aplicații sînt programele utilizatorilor. În cadrul acestora o categorie deosebită o constituie programele de aplicații standard, de tipul programelor pentru rezolvarea sistemelor de ecuații, pentru calculul cu matrice, programele de gestiune etc , care sînt înregistrate pe un suport extern de informație și puse la dispoziția oricărui utilizator.

11.4. Limbaje de programare

Calculatorul poate rezolva orice problemă dacă i se specifică *cum* să o rezolve.

O problemă poate fi rezolvată cu calculatorul dacă s-a găsit o schemă de rezolvare, respectiv un algoritm.

Algoritmul este o succesiune de indicații univoc prezentate, care descriu modul de rezolvare a unor probleme de același tip, descrierea fiind exactă și completă și cuprinzînd un număr finit de pași.

O dată stabilit un algoritm, el este de obicei reprezentat grafic sub forma unei *scheme logice*, pentru a putea fi mai ușor de urmărit. Plecînd de la această reprezentare grafică se scrie apoi *programul* (reprezentarea algoritmului

într-un limbaj de programare). Programul este înregistrat pe un suport de informație și comunicat calculatorului.

Reușita unei activități de prelucrare automată a datelor depinde în mare măsură de calitatea algoritmului și a programului, calculatorul executând numai ceea ce i-a fost indicat de program.

Inițial programele erau scrise direct în limbaj mașină, fiind foarte dificil de elaborat și verificat. O dată cu dezvoltarea sistemelor de operare au apărut limbaje de programare mai apropiate de limbajul natural, numite limbaje evolute. Astfel de limbaje sînt :

- FORTRAN (FORMula TRANslation) destinat scrierii de programe pentru aplicații tehnico-științifice ;

- COBOL (COMmon Business Oriented Language) pentru programele de aplicații din domeniul economic ;

- BASIC (Beginner's All-purpose Symbolic Instruction Code), destinat unui domeniu larg de aplicații.

În afară de limbajele evolute, există și o categorie intermediară - limbajele de asamblare, care de fapt reprezintă o exprimare prin simboluri a limbajului mașină. Exemple de limbaje de asamblare sînt : ASSIRIS (pentru calculatoarele FELIX), MACRO (pentru minicalculatoarele FELIX-M).

În general, limbajele evolute sînt independente de sistemul de calcul, în timp ce limbajele de asamblare sînt specifice unui anumit sistem de calcul.

11.5. Dezvoltare de programe

Programele sînt scrise în limbaje simbolice, ușor accesibile programatorului. Pentru a putea fi executate, ele vor trebui traduse în limbaj mașină. Transformarea programelor într-o formă acceptată de calculator este preluată de sistemul de operare. Această operație se realizează de obicei în două faze, prin execuția unor programe ale sistemului de operare : programul *compilator* pentru limbajul în care este scris programul utilizatorului și *editorul de legături* care transformă programul compilat într-un program direct executabil. Programul direct executabil este încărcat în memorie și apoi lansat în execuție (fig. 11.3).

Deci fazele de dezvoltare ale unui grup sînt :

- compilarea ;
- editarea de legături ;
- execuția propriu-zisă.

Fazele de dezvoltare se comunică sistemului prin comenzi speciale.

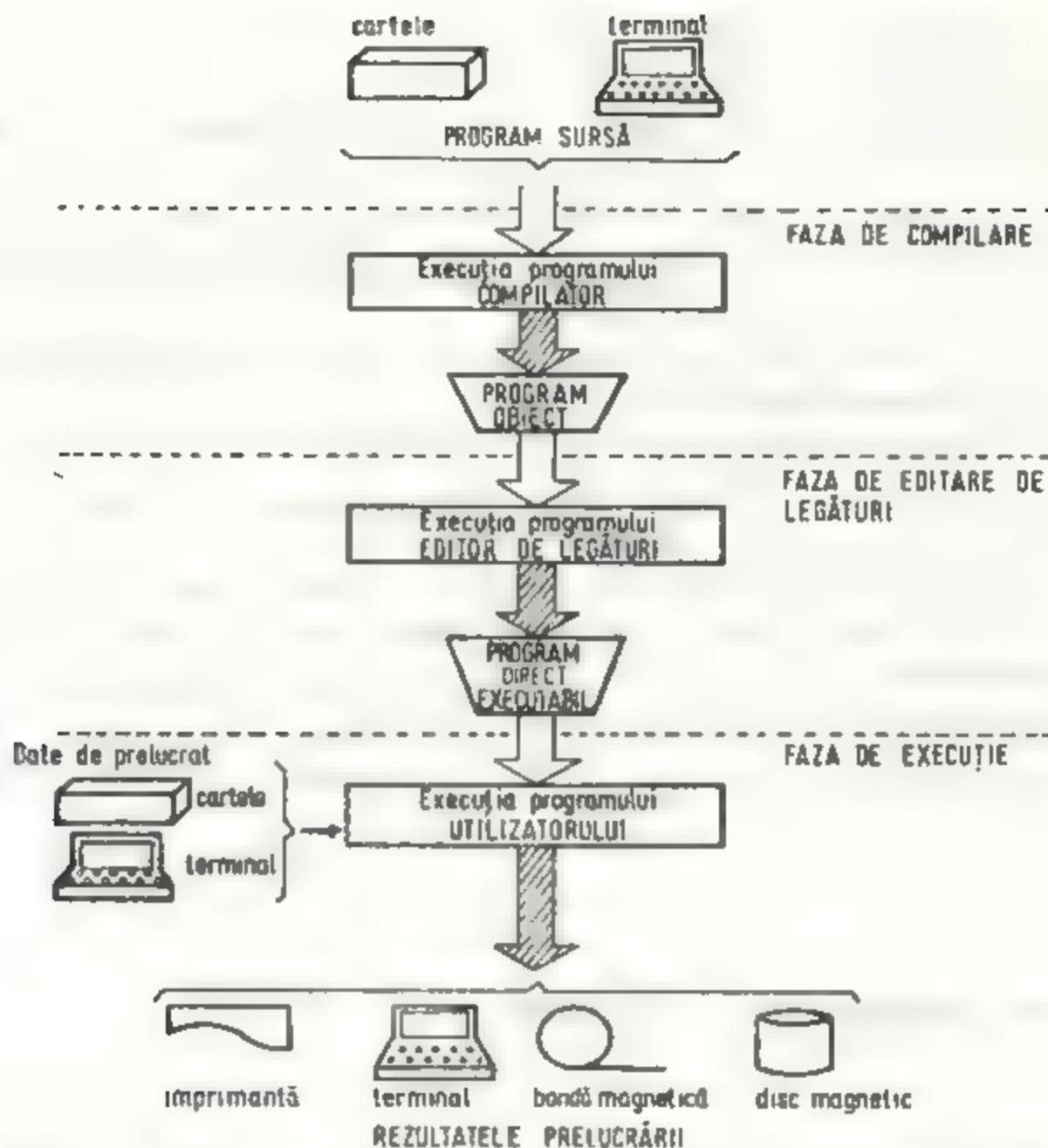


Fig. II.3

II.6. Informatica în România

La noi în țară preocupările în domeniul tehnicii de calcul datează din 1950.

În 1957, la Institutul de Fizică Atomică s-a construit primul calculator electronic românesc CIFA-1. Acesta era un calculator din generația I* avînd o viteză de calcul de 50 operații/secundă.

* În tabelul II.1 se face o trecere succintă în revistă a generațiilor de calculatoare și a principalelor caracteristici.

Generații de calculatoare

Generația	Anul apariției	Tehnologie	Tip de memorie internă	Facilități oferite utilizatorilor
1	1950	<ul style="list-style-type: none"> ● relee ● tuburi electronice 	<ul style="list-style-type: none"> ● tuburi catodice ● linii de inițiere 	<ul style="list-style-type: none"> ● programare în cod mașină ● aparc "programul memorat"
2	1955	<ul style="list-style-type: none"> ● tranzistori ● semiconductori 	<ul style="list-style-type: none"> ● ferite 	<ul style="list-style-type: none"> ● apar limbaje mai evoluate și deci compilatoare pentru aceste limbaje ● transferul datelor este preluat de unități speciale — unități de selecționare (canale)
3 FELIX C-236 FELIX C-512 FELIX C-1024	1968	<ul style="list-style-type: none"> ● circuite integrate 	<ul style="list-style-type: none"> ● nucle de ferită 	<ul style="list-style-type: none"> ● limbaje evaluate ● sisteme de operare pentru familia de calculatoare ● model programare ● model prelucrare ● prelucrări în timp real
3,5 CORAL INDEPENDENT M-18 M-118 ECAROM	1973	<ul style="list-style-type: none"> ● circuite integrate (MSI, LSI) 	<ul style="list-style-type: none"> ● circuite integrate 	<ul style="list-style-type: none"> ● memorii foarte rapide ● ridicarea restricțiilor legate de dimensiunea memoriei interne ● software pentru baze de date ● prelucrare distribuită

La Timișoara s-au realizat calculatoare din seria MECIPT, iar la Cluj-Napoca, DACICC.

O deosebită importanță în promovarea informaticii în țara noastră au avut-o cursurile de calculatoare organizate la București, încă din 1957, de Gr. C. Moisil și la Cluj-Napoca de Tiberiu Popoviciu, activitate continuată cu succes de un număr din ce în ce mai mare de discipoli.

În 1967, conducerea partidului a aprobat un program de dotare cu tehnică de calcul și automatizare a prelucrării datelor. S-au înființat centre teritoriale de calcul electronic (CTCE) precum și centre de calcul în cadrul unor întreprinderi. De asemenea, s-au pus bazele unei industrii electronice proprii, trecându-se la realizarea de componente electronice pentru tehnică de calcul. O atenție deosebită s-a acordat pregătirii de cadre de specialitate, prin instituții de învățământ superior, centre de perfecționare și unele licee.

Din 1968 a început fabricarea în țara noastră a unor calculatoare electronice din generația a 3-a, FELIX C-256.

Alături de acestea, s-au realizat prin concepție proprie noi calculatoare din familia FELIX : C-512, C-1024, C-32.

În prezent, producem sisteme de calcul cu o arhitectură modernă, bazându-ne pe tehnologii avansate : familia de minicalculatoare FELIX-M (INDEPENDENT I-100, I-102P și CORAL 4001, 4011, 4030), microcalculatoarele M-18, M-118, ECAROM, CUB, JUNIOR și calculatoarele profesionale și individuale : FELIX-PC, HC-85, AMIC, PRAE și TIM-S. Apariția calculatoarelor profesionale și individuale va facilita răspândirea tehnicii de calcul în mediile neindustriale și va permite familiarizarea elevilor, încă din ciclul gimnazial, cu calculatorul electronic.

Operații aritmetice și operații logice

III.1. Noțiuni introductive

Din școala generală cunoaștem că mulțimea numerelor reale \mathbb{R} este formată din reuniunea a două submulțimi disjuncte, mulțimea numerelor raționale \mathbb{Q} și mulțimea numerelor iraționale $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

De asemenea, cunoaștem din capitolul I că orice număr real se poate scrie într-o bază oarecare, deci și în baza zece, ca o succesiune de cifre la partea întreagă și o succesiune de cifre la partea zecimală. În practică, în calcule, nu totdeauna utilizăm sau putem utiliza un anumit număr real, mai ales în cazul numerelor iraționale. De aceea ori de câte ori tehnica de lucru se ușurează, fără ca rezultatele să devină inutilizabile, se vor putea folosi, în locul oricăror numere reale, valori apropiate ale acestora, numite valori aproximative sau, simplu, aproximante.

III.2. Aproximantele numerelor reale

Noțiunea de aproximantă (valoare care aproximează un anumit număr) o vom utiliza pentru orice număr real care urmează a fi folosit în calcule.

De aceea, considerînd x un număr real oarecare ($x \in \mathbb{R}$), pentru aproximantele lui x dăm următoarea :

III.2.1. Definiție. Numim aproximantă a unui număr real x orice număr rațional x^* care poate fi folosit în calcule în locul numărului x .

Exemplu :

Dacă $x = 24,235$, atunci numerele 20 ; 24 ; 25 ; 24,2 ; 24,3 ; 24,23 ; 24,24 ; 10 ; 100 ; 100 000 și oricare altele pot fi considerate ca aproximante ale lui x .

Mulțimea aproximantelor lui x o vom aprecia ca avînd două submulțimi, o submulțime formată cu aproximantele mai mici decît x , ale cărei elemente le vom numi aproximante prin lipsă, notate cu \underline{x} , și o submulțime formată cu aproximantele mai mari decît x ale cărei elemente le vom numi aproximante prin adaos sau aproximante prin exces, notate cu \bar{x} .

A considera pentru un număr real x o aproximantă x^* , înseamnă a aproxima numărul real x cu aproximanta x^* .

III.3. Procedee de aproximare a numerelor reale

III.3.1. Aproximări prin rotunjire la numerele cu parte zecimală (regula completării)

Fie un număr real x care are cel puțin n cifre la partea zecimală. Dorim să-l aproximăm cu o aproximantă a sa care să aibă n cifre la partea zecimală. Putem fi în unul din următoarele două cazuri:

a) cifra a_{n+1} este una dintre cifrele 0, 1, 2, 3, 4, și în acest caz se renunță la aceasta cifra precum și la cele de la dreapta ei;

b) cifra a_{n+1} este una din cifrele 5, 6, 7, 8, 9 și în acest caz adunăm la număr $\frac{1}{10^n}$ și renunțăm la ultimele cifre zecimale, începând cu poziția a_{n+1} .

Spunem că atât în cazul a) cât și în cazul b) am efectuat o aproximare prin rotunjire.

III.3.1.1. Regulă Aproximarea prin rotunjire a unui număr real cu cel puțin n zecimale, se face prin lipsă sau prin exces la zecimala a n -a, renunțând la zecimalele care-i urmează, zecimala a n -a rămânând neschimbată sau majorată cu o unitate după cum zecimala care-i urmează este o cifră mai mică decât cinci sau mai mare ori egală cu cinci.

III.3.1.2. Observații:

1. Aproximanta obținută prin rotunjire la III.3.1. a) este o aproximantă prin lipsă când numărul real este pozitiv.

2. Aproximanta obținută prin rotunjire la III.3.1. b) este o aproximantă prin exces când numărul real este pozitiv.

Exemple

1) Numărul $x = 2,8435$ dorim să fie scris doar cu două zecimale, aproximat prin rotunjire, deci $n = 2$. Deoarece $a_3 = 3$ și $3 < 5$, atunci $x \approx 2,84$ reprezintă o aproximantă prin lipsă.

2) Numărul $x = 324,76581$ dorim să fie scris doar cu trei zecimale, aproximat prin rotunjire, deci $n = 3$. Deoarece $a_4 = 8$ și $8 > 5$, atunci $x \approx 324,766$ reprezintă o aproximantă prin exces.

III.3.2. Aproximări prin rotunjire la numerele întregi (regula completării)

Se dă un număr întreg x cu cel puțin atâtea cifre cât este ordinul la care vrem să facem aproximarea. Dorim să-l aproximăm la una dintre cifrele , unităților, zecilor, sutelor, miilor etc. Notăm cu k acest ordin și cu $k+1$, ordinul imediat inferior. Procedăm ca în unul din următoarele două cazuri:

a) înlocuim cu zero-uri toate cifrele de la dreapta cifrei de ordinul k , dacă cifra de ordin $k+1$ este una dintre cifrele 0, 1, 2, 3, 4;

b) adunăm 10^k cu numărul dat și înlocuim toate cifrele de la dreapta cifrei de ordinul k prin zerouri când cifra de ordin $k - 1$ este una dintre cifrele 5, 6, 7, 8, 9.

Spunem că atât în cazul a) cât și în cazul b) am efectuat o aproximație prin rotunjire.

III.3.2.1. Regulă. Aproximarea prin rotunjire a unui număr întreg la o cifră de un anumit ordin fixat se face prin lipsă sau prin exces, înlocuind prin zerouri cifrele care urmează când prima cifră care-i succede este mai mică decât 5, sau majorând cifra fixată cu o unitate și înlocuind toate cifrele care i urmează cu zerouri, dacă prima cifră care-i succede este mai mare ori egală cu cinci.

III.3.2.2. Observații.

1. Aproximația obținută prin rotunjire la III.3.2 a) este o aproximație prin lipsă când $\varepsilon > 0$.

2. Aproximația obținută prin rotunjire la III.3.2 b) este o aproximație prin exces când $\varepsilon < 0$.

Notând cu c cifra de ordin k și cu d cifra de ordin $k - 1$ în următoarele exemple avem:

1. Numărul $x = 7589345$ dorim să-l aproximăm la cifra miilor prin rotunjire, deci $c = 9$. Pentru că $d = 3$ și $3 < 5$, atunci $\hat{x} = 7589000$ reprezintă o aproximație prin lipsă.

2. Numărul $x = 47979463$ dorim să-l aproximăm la cifra zecilor de mii prin rotunjire, deci $c = 7$. Pentru că $d = 9$ și $9 > 5$, atunci $\hat{x} = 47980000$ reprezintă o aproximație prin exces.

3. Numărul $x = 32456$ dorim să-l aproximăm la cifra zecilor prin rotunjire, deci $c = 5$. Pentru că $d = 6$ și $6 > 5$, atunci $\hat{x} = 32460$ reprezintă o aproximație prin lipsă.

4. Numărul $x = 83459478$ dorim să-l aproximăm la cifra miilor prin rotunjire, deci $c = 9$. Pentru că $d = 4$ și $4 < 5$, atunci $\hat{x} = 83459000$ reprezintă o aproximație prin exces.

5. Numărul $x = 573499953$ dorim să-l aproximăm la cifra sutelor prin rotunjire, deci $c = 9$. Pentru că $d = 5$, atunci $\hat{x} = 573500000$.

6. Numărul $x = 15700000$ dorim să-l aproximăm la cifra zecilor de mii sau la orice cifră de la dreapta ei. În acest caz $\hat{x} = \bar{x} = x$.

III.3.3. Aproximarea prin rotunjire efectuată la mașinile de calcul

În aproximarea prin rotunjire este necesară comparația cifrei la care se face rotunjirea cu cifra 5 precum și cercetarea semnului numărului pentru a se putea decide în ce mod se face rotunjirea (prin lipsă sau prin exces).

Deoarece, pentru mașinile de calcul această operație este complicată și poate duce uneori la un consum mare de timp, se înlocuiește operația de comparare cu o operație de adunare.

Astfel, în cazul în care x este un număr real scris sub formă de fracție zecimală cu cel puțin n zecimale și dorim să-l scriem printr-o aproximantă cu n zecimale, adunăm la acest număr numărul cu același număr de zecimale și același semn cu el având toate zecimalele zerouri în afară de zecimala a $n + 1$ -a care este 5. Rezultatului astfel obținut i se neglijează cifrele după zecimala a n -a. Aproximanta obținută este o aproximantă prin rotunjire.

Exemple :

1) Numărul $x = 68,975342$ dorim să fie scris cu patru zecimale, deci $n = 4$. Îi adunăm numărul 0,000050 și avem $68,975342 + 0,000050 = 68,975392$. La rezultatul astfel obținut se neglijează zecimalele de după zecimala a 4-a, obținându-se $x = 68,9753$, rezultat identic cu cel ce s-ar fi obținut aplicând rotunjirea.

2) Numărul $x = 732,84526$ dorim să fie scris cu două zecimale, deci $n = 2$. Îi adunăm numărul 0,00500 și avem $732,84526 + 0,00500 = 732,85026$. La rezultatul astfel obținut se neglijează zecimala de după zecimala a 2-a, obținându-se $x = 732,85$, rezultat identic cu cel ce s-ar fi obținut aplicând rotunjirea.

Fie acum cazul în care x este un număr întreg cu n cifre și dorim să-l rotunjim la o cifră de un anumit ordin k și care este una din cifrele : unități, zeci, sute, mii etc. Pentru aceasta adunăm la numărul dat numărul de același semn cu el, cu un număr de cifre egal cu numărul de cifre de la dreapta cifrei de ordin k , având prima cifră 5, iar următoarele cifre zerouri. Rezultatului astfel obținut i se substituie cifrele de după cifra de ordin k prin zerouri.

Exemple :

1) Numărul $x = 97\,351\,942$ dorim să-l aproximăm la cifra zecilor de mii, deci la a 5-a cifră de la dreapta la stînga. Îi adunăm numărul de patru cifre de același semn avînd prima cifră 5 și celelalte zerouri, și avem $97\,351\,942 + 5\,000 = 97\,356\,942$. La rezultatul obținut se substituie ultimele 4 cifre cu zerouri. Obținem $x = 97\,350\,000$.

2) Numărul $x = 475\,394\,278$ dorim să-l aproximăm la ordinul zecilor de milioane, deci la a 8-a cifră de la dreapta la stînga. Îi adunăm numărul de 7 cifre de același semn avînd prima cifră de 5 și celelalte zerouri, și avem $x = 475\,394\,278 + 5\,000\,000 = 480\,394\,278$. La rezultatul astfel obținut se substituie ultimele 7 cifre cu zerouri. Se obține $x = 480\,000\,000$.

III.3.4. Aproximarea canonică sau prin trunchiere

De foarte multe ori, mai ales în operații cu numere, cînd ne interesează aproximante ale rezultatelor, sîntem conduși a considera aproximante care să rețină numai un anumit număr de zecimale sau cifrele de la un anumit ordin în sus. Spunem că în acest caz facem o aproximare canonică sau prin trunchiere.

Fie un număr real x scris sub formă de fracție zecimală cu cel puțin n zecimale, pe care vrem să-l aproximăm folosind forma canonică reținînd n

zecimale. Pentru aceasta se renunță la toate zecimalele de după zecimala a n -a, obținându-se o aproximantă a numărului x .

III.3.4.1. *Regulă.* Pentru aproximarea canonică a unui număr real x scris sub forma de fracție zecimală cu cel puțin n zecimale din care vrem să reținem primele p zecimale ($p \leq n$) vom renunța la ultimele $n - p$ zecimale.

Exemple :

1) Numărul $x = 0,4597323$ dorim să-l aproximăm, folosind aproximația canonică, reținând primele 4 zecimale. Deci $\bar{x} = 0,4597$.

2) Numărul $x = -23,579432$ dorim să-l aproximăm, folosind aproximația canonică, reținând primele două zecimale. Deci $\bar{x} = -23,57$.

Pentru un număr întreg x cu cel puțin n cifre, aproximarea canonică de un anumit ordin înseamnă a înlocui cifrele care se află la dreapta cifrei de acel ordin cu zerouri, obținându-se astfel o aproximantă a numărului x .

III.3.4.2. *Regulă.* Pentru aproximarea canonică a unui număr întreg x cu cel puțin n cifre, din care vrem să reținem primele p ($p \leq n$) cifre (de la stînga) ale numărului, substituim ultimele $n - p$ cifre (de la dreapta) ale numărului cu zerouri.

Exemplu :

Numărul $x = 11984572$ dorim să-l aproximăm, folosind aproximația canonică, reținând primele patru cifre (de la stînga). Avem $\bar{x} = 13\ 989\ 000$, care este o aproximantă a lui x .

III.4. Erori și tipuri de erori

III.4.1. Noțiunea de eroare

Cînd înlocuim un număr real x cu altul x^* , care se numește aproximantă a numărului x , atunci această aproximantă x^* exprimă pe x cu un anumit grad de exactitate sau precizie. Evident, cu cît x^* este mai apropiat de valoarea lui x , cu atît x^* aproximează mai bine pe x .

Pentru măsurarea gradului de precizie cu care o aproximantă x^* aproximează pe x vom cauta să știm care este diferența dintre aproximanta x^* și numărul x pe care îl aproximează și această diferență o vom numi eroare.

III.4.1.1. *Definiție.* Se numește eroare a unei aproximante față de numărul real aproximat, diferența între aproximantă și numărul real pe care îl aproximează.

Notînd numărul cu x , aproximanta sa cu x^* și eroarea aproximantei cu ε vom avea, potrivit definiției, relația :

$$\varepsilon = x^* - x.$$

Deoarece aproximanta unui număr real poate fi prin lipsă sau prin exces, putem avea eroarea dată de una din următoarele două relații :

$$\varepsilon = \underline{x} - x \text{ sau } \varepsilon = \bar{x} - x.$$

Însă din $\bar{x} < x$ rezultă $x - \bar{x} < 0$, adică $\varepsilon < 0$, iar din $\bar{x} > x$ rezultă $\bar{x} - x > 0$, adică $\varepsilon > 0$, ceea ce înseamnă că eroarea unei aproximante poate fi negativă sau pozitivă.

III.4.1.2. Definiție. Spunem că aproximanta x^* a unui număr real x este prin exces sau prin lipsă după cum eroarea aproximantei x^* este pozitivă sau negativă.

Exemplu :

Fie numărul $x = 279,453$ și două aproximante ale sale $\underline{x} = 279,45$ și $\bar{x} = 279,5$. Erorile ce corespund celor două aproximante sînt :

$$\varepsilon = -0,003 \text{ și } \varepsilon = 0,047.$$

III.4.2 Eroare absolută, eroare absolută maximă

În definiția noțiunii de eroare am constatat că eroarea poate fi atât pozitivă cât și negativă. Deoarece în foarte multe cazuri nu are importanță semnul erorii, ci interesează mărimea acesteia, vom defini noțiunea de eroare absolută.

III.4.2.1. Definiție. Eroarea absolută a unei aproximante este valoarea absolută a erorii sale.

Potrivit definiției, pentru un număr real x și o aproximantă a sa x^* eroarea absolută va fi $|x^* - x|$. Vom nota eroarea absolută cu a unde $a \geq 0$. Avem deci relația :

$$a = |x^* - x|.$$

Cunoașterea erorii absolute a unei aproximante ne permite să dăm o încadrare a numărului real :

$$(|x^* - x| = a) \Leftrightarrow (x^* - a \leq x \leq x^* + a).$$

Noțiunea de eroare absolută ne permite să facem aprecieri asupra aproximării numărului de către o aproximantă sau alta. Astfel dacă x_1^* și x_2^* sînt două aproximante ale aceluiași număr real x și dacă $a_1 < a_2$ spunem că x_1^* aproximează mai bine pe x decît x_2^* și deci x_1^* este o aproximantă mai bună a lui x decît x_2^* .

Exemplu :

Fie numărul $x = 1,45724$ cu aproximantele $x_1^* = 1,457$ și $x_2^* = 1,46$ cu erorile absolute $a_1 = 0,00024$ și $a_2 = 0,00276$. Deoarece $a_1 < a_2$ aproximanta x_1^* aproximează mai bine pe x decît x_2^* sau, ceea ce este totuna, x_1^* aproximează mai slab pe x decît aproximanta x_2^* .

Este de remarcă că media aritmetică a două aproximante ale aceluiași număr este o aproximantă mai bună decît cel puțin una din cele două.

Exemplu.

Fie numărul $x = 21,548$ cu aproximantele $x_1^* = 21,51$ și $x_2^* = 21,55$. Fie fiind date de $\varepsilon_1 = -0,008$ și $\varepsilon_2 = 0,002$, media aritmetică a aproximantelor este $x^* = \frac{21,51 + 21,55}{2} = 21,545$ iar eroarea pentru noua aproximantă, egală $\varepsilon = 0,003$. Deci noua aproximantă x^* este mai bună decât x_1^* dar mai slabă decât x_2^* .

În operațiile aritmetice cu aproximante, în foarte multe cazuri, sîntem în situația că diferite operații conduc la erori diferite, ceea ce face ca în general să ne punem problema cunoașterii sau determinării celei mai mari erori pentru a putea afla limita nivelului preciziei cu care se lucrează. De aceea vom introduce noțiunea de eroare absolută maximă prin următoarea

III.4.2.2. Definiție. Numim eroare absolută maximă pentru toate aproximantele x_i^* pentru numărul real x , cel mai mic număr A care satisface inegalitatea $A \geq \max(\varepsilon_i)$ unde ε_i sînt erorile absolute ale aproximantelor x_i^* .

Este evident că pentru un singur număr x și pentru o singură aproximantă x^* a sa x^* eroarea absolută maximă este chiar eroarea absolută a acelei aproximante, deoarece $a \leq a$ pentru orice a . De aceea vom utiliza noțiunea de eroare absolută maximă a unei aproximante și în cazul unei singure aproximante.

Eroarea absolută este mai mică sau egală cu numărul ce se obține prin înlocuirea în x a cifrei ordinului de aproximare cu 1 și a tuturor celorlalte cifre cu zero pentru orice fel de aproximare la cifra de ordinul respectiv. Urmează că putem considera numărul astfel obținut ca eroare absolută maximă a aproximantelor prin lipsă sau exces de numărului x pentru cifra de ordinul fixat.

III.4.3. Eroare relativă, eroare relativă maximă

Cunoașterea numai a erorilor absolute a unei aproximante pentru un număr real este de foarte multe ori insuficientă pentru a caracteriza gradul de precizie într-un calcul sau într-o măsurătoare. Așa, de exemplu, dacă afirmăm că eroarea unei anumite lungimi măsurate este de 1 mm, fără a se cunoaște și mărimea lunginii măsurate, nu se poate spune dacă măsurarea este bine făcută sau nu. Dacă eroarea de 1 mm se referă la măsurarea unei lungimi de 50 m se poate spune că rezultatul este extraordinar de bun, dar dacă s-ar măsura diametrul interior al unui rulment și în loc de 10 mm am aprecia prin măsurătoare că are 9 mm, este evident că nimeni nu poate aprecia rezultatul ca fiind bun.

De aceea, calitatea unui rezultat poate fi cu mult mai bine apreciată, dacă se cunoaște așa-numita eroare relativă în definirea căreia intră și mărimea însăși.

III.4.3.1. Definiție. Eroarea relativă a unei aproximante x^* pentru un număr real x este egală cu raportul dintre eroarea absolută a aproximantei x^* și valoarea absolută a numărului x .

Numărul real fiind x , aproximanta sa x^* și notînd eroarea relativă cu e vom avea, potrivit definiției

$$e = \frac{|x^* - x|}{|x|} = \frac{a}{|x|}.$$

Exemplu :

Fie $x = 1,415$ și $x^* = 1,42$ avem $a = 0,005$, iar $e = \frac{|0,005|}{|1,415|}$, care este aproximativ 0,004.

Deseori eroarea relativă se exprimă fie la sută (în procente), fie la mie. În exemplul dat, eroarea relativă este de 4‰ (4 la mie).

Ca și pentru eroarea absolută maximă și aici considerente de ordin practic ne determină să introducem noțiunea de eroare relativă maximă.

Dăm astfel următoarea

III.4.3.2. Definiție. Numim eroare relativă maximă a aproximantelor x_i^* pentru numărul real x , pe care o notăm cu E , raportul dintre eroarea absolută maximă și valoarea absolută a numărului.

Pentru un singur număr x și pentru o singură aproximantă a sa x^* eroarea relativă maximă este chiar eroarea relativă a acelei aproximante, deoarece eroarea absolută maximă, în acest caz, este chiar eroarea absolută a aproximantei. De aceea vom utiliza noțiunea de *eroare relativă maximă a unei aproximante* și în cazul unei singure aproximante.

Potrivit definiției date și a notațiilor adoptate avem :

$$E = \frac{A}{|x|}.$$

III.5. Erori datorate modului de reprezentare

În operațiile aritmetice cu numere reale sîntem adeseori conduși să operăm cu aproximante care au un număr finit de n zecimale, în general mai mic decît numărul de zecimale η , al numerelor reale date ($\eta \geq n$), fără ca rezultatul obținut să devină inutilizabil.

Deoarece în locul numerelor reale date operăm cu aproximantele lor care au altă reprezentare (reprezentare finită, cu un număr dat de n zecimale sau cifre), eroarea introdusă se numește *eroare de reprezentare*.

Eroarea de reprezentare este prezentă de la început în calcule și străbate tot complexul de operații pătrunzînd în rezultat. De aceea vom spune că eroarea de reprezentare este o eroare transmisibilă.

III.6. Inegalitățile fundamentale în aproximarea numerelor reale

Fie numărul real pozitiv x dat prin

$$x = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-k} \dots$$

unde $a_n \neq 0$ (a_n este prima cifră diferită de zero în scrierea numărului x de la stînga la dreapta)

și

$$x^* = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-1} \dots a_{-k}$$

o aproximantă a lui x . Putem scrie această aproximantă folosind forma de scriere cu ajutorul puterilor lui 10.

$$x^* = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0 + \frac{a_{-1}}{10} + \frac{a_{-2}}{10^2} + \dots + \frac{a_{-k}}{10^k}.$$

Nu este greu de remarcat că atât x cît și x^* admit încadrarea

$$10^n \leq x < 10^{n+1} \text{ și } 10^n \leq x^* \leq 10^{n+1}.$$

Pentru demonstrație vom considera mai întîi o aproximantă \tilde{x} prin adaos a lui x în care partea zecimală se substituie cu 1 obținînd $\tilde{x} - 1 \leq x \leq \tilde{x}$.

Ținînd seama că pentru cifrele de la partea stîngă a aproximantei avem relațiile

$$1 \leq a_n \leq 9$$

$$0 \leq a_k \leq 9 \quad \text{pentru } k = 1, 2, \dots, n-1.$$

$$1 \leq a_0 + 1 \leq 10$$

Înmulțind prima inegalitate cu 10^n și a doua cu 10^k , apoi sumînd avem

$$10^n + 1 \leq \tilde{x} \leq 9(10^n + 10^{n-1} + \dots + 10) + 10.$$

Efectuînd suma din partea dreaptă a celei de a doua inegalități rezultă

$$10^n + 1 \leq \tilde{x} \leq 10^{n+1}$$

care se poate scrie

$$10^n \leq \tilde{x} - 1 \text{ și } \tilde{x} \leq 10^{n+1},$$

unde folosind și $\tilde{x} - 1 \leq x$, $x \leq \tilde{x}$ scrise anterior avem

$$10^n \leq \tilde{x} - 1 \leq x \leq \tilde{x} \leq 10^{n+1}$$

care numai pentru numărul x devine

$$10^n \leq x < 10^{n+1}.$$

Inegalitățile pentru aproximanta x^* se pot scrie direct, dacă avem în vedere că demonstrația pentru \tilde{x} poate avea loc indiferent de ordinul la care se face rotunjirea prin adaos.

Deci

$$10^n \leq x^* \leq 10^{n+1}.$$

Dubla relație obținută pentru x formează așa-numita *prima dublă inegalitate* fundamentală în aproximarea numerelor reale iar exponentul n care apare în puterile lui 10 este numit *caracteristica numărului real* x .

De asemenea numărul x și aproximanta lui x^* , dată anterior, satisfac și relațiile:

$$a_n 10^n \leq x < (a_n + 1) 10^n, \quad a_n \cdot 10^n \leq x^* \leq (a_n + 1) 10^n.$$

Pentru a demonstra aceste inegalități vom considera aproximanta \tilde{x} de mai înainte formată din două părți. Astfel:

$$\tilde{x} = a_n 10^n + N.$$

Ținând seama că pentru orice cifră din N avem

$$\begin{aligned} 0 \leq a_k \leq 9 & \quad \text{pentru } k = 1, 2, \dots, n-1 \\ 1 \leq a_0 + 1 \leq 10. \end{aligned}$$

Înmulțind prima relație cu 10^k și sumând avem

$$1 \leq N \leq 9(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10) + 10.$$

Faciind suma în partea dreaptă a inegalității obținem

$$1 \leq N \leq 10^n.$$

Adunând acum la fiecare parte $a_n 10^n$ găsim

$$a_n 10^n + 1 \leq \tilde{x} \leq (a_n + 1) 10^n.$$

Această dublă inegalitate poate fi scrisă și astfel:

$$a_n 10^n \leq \tilde{x} - 1 \text{ și } \tilde{x} \leq (a_n + 1) 10^n.$$

Ținând seama că

$$\tilde{x} - 1 \leq x \text{ și } x \leq \tilde{x}$$

care au fost scrise mai înainte avem

$$a_n 10^n \leq \tilde{x} - 1 \leq x \leq \tilde{x} \leq (a_n + 1) 10^n.$$

Reținând numai relațiile privitoare la numărul real x se găsește

$$a_n 10^n \leq x < (a_n + 1) 10^n.$$

Pentru aproximanta x^* putem scrie relația direct, deoarece demonstrația pentru \tilde{x} este aceeași, oricare ar fi ordinul la care se face rotunjirea prin adaos. Așa încît

$$a_n 10^n \leq x^* \leq (a_n + 1) 10^n.$$

Această a doua dublă relație scrisă pentru x este numită *a doua dublă inegalitate* fundamentală în aproximarea numerelor reale.

De subliniat este faptul că cele două duble inegalități fundamentale în aproximarea numerelor se referă de fapt numai la numărul real x , dar am introdus alături de numărul real x și o aproximantă a lui, x^* care poate avea totdeauna o scriere zecimală finită și în consecință poate substitui în calcule pe x .

Precizăm că toate cele arătate în acest paragraf au fost considerate pentru cazul în care numărul real x este pozitiv. Pentru cazul în care numărul real x ar fi negativ se păstrează toate afirmațiile, schimbând doar inegalitățile în inegalități de sens contrar.

III.7. Aproximante cu eroarea absolută mai mică sau egală cu $\frac{1}{10^k}$

Fie numărul real x iar x_1^* și x_2^* două aproximante ale lui x , prima prin lipsă și a doua prin exces.

III.7.1. Definiție. Spunem că x_1^* și x_2^* sînt **aproximante prin lipsă și respectiv prin exces** ale lui x cu **eroarea absolută mai mică sau egală cu $\frac{1}{10^k}$** dacă verifică următoarele 3 proprietăți :

1° Fiecare au câte k cifre la partea zecimală, adică $x_1^* = \frac{x'}{10^k}$ și $x_2^* = \frac{x''}{10^k}$

unde x' și x'' sînt întregi.

2° Numărul x se află cuprins între valorile aproximantelor respective, adică $x_1^* \leq x \leq x_2^*$.

3° Diferența lor este $\frac{1}{10^k}$, adică $x_2^* - x_1^* = \frac{1}{10^k}$.

Eroarea absolută este mai mică sau egală cu $\frac{1}{10^k}$ pentru că din definiție avem

$$x_1^* \leq x \leq x_2^*$$

iar aceasta duce la

$$x - x_1^* \leq x_2^* - x_1^* \quad x_1^* \text{ și } x_2^* - x \leq x_2^* - x_1^*.$$

Avînd în vedere proprietatea 3° rezultă

$$x - x_1^* \leq \frac{1}{10^k} \quad \text{și} \quad x_2^* - x \leq \frac{1}{10^k}.$$

În proprietatea 1° făcînd scăderea între membrii egalităților și ținînd seama de proprietatea 3° găsim că

$$x'' = x' + 1$$

deci x' și x'' sînt doi întregi consecutivi. Acest rezultat corelat cu proprietatea 2° arată că avem

$$\frac{x'}{10^k} \leq x \leq \frac{x' + 1}{10^k}.$$

Această relație duce la stabilirea modului de aproximare a unui număr real oarecare x .

III.7.2 *Regulă.* Aproximanta prin lipsă cu mai puțin de $\frac{1}{10^k}$ se obține reținînd din numărul x cifrele de la partea întreagă și primele k cifre ale părții zecimale, iar aproximanta prin adaos se obține adăugînd o unitate de ordinul $\frac{1}{10^k}$ la aproximanta prin lipsă.

Proprietățile 1° și 3° se verifică imediat. Mai trebuie arătat că $x \leq x_2^*$ pentru că $x \geq x_1^*$ este de asemenea imediată.

Într-adevăr

$$\begin{aligned} x &= a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-k} | 0,0 \dots 0 a_{-(k+1)} a_{-(k+2)} \dots = x_1^* + \\ &+ 0,0 \dots 0 a_{-(k+1)} a_{-(k+2)} \dots \leq x_1^* + \underbrace{0,0 \dots 0(9)}_{\text{de } k \text{ ori zero}} = x_1^* + \underbrace{0,0 \dots 01}_{\text{de } k-1 \text{ ori zero}} = x_1^* + \\ &+ \frac{1}{10^k} = x_2^*. \end{aligned}$$

Deci

$$x \leq x_2^*.$$

La aproximarea prin rotunjire dată la III.3.1 și III.3.2, aproximantele sînt cu o eroare absolută mai mică sau egală cu $\frac{1}{2 \cdot 10^k}$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$ pentru cifre de la partea întreagă și $k > 0$ pentru cifre de la partea fracționară) deoarece avem în vedere cifra care urmează la dreapta cifrei fixate pentru aproximare (dacă este 0, 1, 2, 3, 4 sau dacă este 5, 6, 7, 8, 9).

Cu regula completării se obțin aproximante cu eroare absolută mai mică sau egală cu $\frac{1}{2 \cdot 10^k}$.

De asemenea aproximarea canonică sau prin trunchiere precum și aproximarea prin rotunjire efectuate la mașinile de calcul, dau erori mai mici sau egale cu $\frac{1}{10^k}$ și respectiv $\frac{1}{2 \cdot 10^k}$.

Exemple :

1. Să se aproximeze numărul π cu o aproximantă prin lipsă și o aproximantă prin exces având o eroare absolută cel mult egală cu $\frac{1}{10^k}$ unde $k = 1, 2, 3$, iar $\pi = 3,14159265 \dots$

$$k = 1 \quad \begin{array}{ll} \text{prin lipsă} & \pi = 3,1 \\ \text{prin exces} & \pi = 3,2 \end{array}$$

$$k = 2 \quad \begin{array}{ll} \text{prin lipsă} & \pi = 3,14 \\ \text{prin exces} & \pi = 3,15 \end{array}$$

$$k = 3 \quad \begin{array}{ll} \text{prin lipsă} & \pi = 3,141 \\ \text{prin exces} & \pi = 3,142 \end{array}$$

2. Să se aproximeze numărul π cu o eroare absolută cel mult egală cu $\frac{1}{2 \cdot 10^k}$, unde $k = 1, 2, 3, 4$.

$$k = 1 \Rightarrow \pi = 3,1, \quad k = 2 \Rightarrow \pi = 3,14; \quad k = 3 \Rightarrow \pi = 3,142,$$

$$k = 4 \Rightarrow \pi = 3,1416.$$

III.8. Cifre sigure și cifre îndoielnice pentru o aproximantă dată

Fie numărul real dat de

$$x = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_{n-k} 10^{n-k} + a_{n-k-1} 10^{n-k-1} + \dots$$

și x^* o aproximantă a lui, conținând primele k cifre.

$$x^* = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_{n-k+1} 10^{n-k+1}.$$

Eroarea absolută a acestei aproximante este dată de

$$a \leq (a_{n-k} + 1) 10^{n-k}.$$

Deoarece $a_{n-k} \leq 9$ avem

$$A = 10^{n-k+1}.$$

Pentru cazurile în care dorim ca aproximarea să fie mai bună se poate aplica regula de completare pentru determinarea unei aproximante ce are o eroare mai mică sau egală cu $\frac{1}{2 \cdot 10^k}$ pentru numere pozitive.

Din

$$a \leq (a_{n-k} + 1) 10^{n-k}$$

deducem următoarele două cazuri aplicînd regula completării:

1°. pentru $a_{n-k} \geq 5$, majorăm pe a_{n-k+1} cu o unitate și obținem o aproximantă prin exces a cărei eroare absolută este dată de

$$a = x^* - \varepsilon = 10^{n-k+1} - (a_{n-k}10^{n-k} + \dots)$$

unde punînd în locul cifrei a_{n-k} valoarea minimă pe care o poate lua, 5 și neglijînd celelalte cifre ce urmează după a_{n-k} diferența crește devenind

$$A = x^* - x \leq 10^{n-k+1} - 5 \cdot 10^{n-k} = \frac{1}{2} 10^{n-k+1};$$

2°. pentru $a_{n-k} < 5$ considerăm în relația

$$a \leq (a_{n-k} + 1)10^{n-k}$$

cifra $a_{n-k} = 4$, valoarea maximă pe care o poate lua și avem o aproximantă prin lipsă astfel încît eroarea absolută

$$a = x - x^* \leq 5 \cdot 10^{n-k}.$$

Înmulțind și împărțind cu 2 avem

$$A = \frac{1}{2} 10^{n-k+1}.$$

În acord cu aceste ultime două cazuri putem da următoarea

11.8 1. Definiție. Spunem că x^* este o aproximantă a numărului real x , $x > 0$, cu k cifre sigure dacă eroarea absolută maximă este mai mică sau egală cu 10^{n-k+1} fără aplicarea regulii de completare și mai mică sau egală cu $\frac{1}{2} 10^{n-k+1}$ cu aplicarea regulii de completare, unde n este caracteristica numărului x .

Cifrele care urmează cifrelor sigure se numesc cifre nesigure sau cifre îndoielnice.

De aceea dintr-o aproximantă nu vom reține decît cifrele sigure. În calcule însă este bine să se rețină două sau chiar trei cifre în plus peste numărul de cifre sigure și numai la rezultat luăm aproximanta acestuia cu numărul de cifre sigure precizat de eroarea absolută maximă.

Exemple :

1. Să se determine numărul de cifre sigure ale aproximantei numărului π a cărei eroare absolută maximă este de 0,00001.

Avem din problemă :

$$A = \frac{1}{10^5},$$

iar din definiție,

$$A = 10^{n-k+1}$$

fără aplicarea regulii de completare.

Deoarece numărul π are o singură cifră la partea întreagă, urmează că $n = 0$.

Deci,

$$A = \frac{1}{10^5} = 10^{-5+1}.$$

Adică,

$$10^5 \cdot 10^{-k+1} = 1 = 10^0,$$

adică

$$10^{-k+6} = 10^0, \quad -k + 6 = 0, \quad k = 6.$$

Rezultă că aproximanta respectivă a fost luată cu 6 cifre sigure, deci este 3,14159.

2. Să se determine numărul de cifre înălțime ale aproximantei numărului

$$\sqrt{3} \approx 1,7320508078423 \text{ a cărei eroare absolută maximă este de } \frac{1}{10^{10}}.$$

Avem

$$A = \frac{1}{10^{10}} = 10^{n-k+1}$$

fără aplicarea regulii de completare.

Deoarece numărul $\sqrt{3}$ are o singură cifră la partea întreagă, înscămină că $n = 0$.

Deci

$$A = \frac{1}{10^{10}} = 10^{-k+1}; \quad 10^{10} \cdot 10^{-k+1} = 1 = 10^0$$

adică

$$k + 11 = 0, \quad k = 11.$$

Aproximanta lui $\sqrt{3}$ având 11 cifre sigure, urmează că ultimele 3 cifre sînt înălțime.

III.9. Determinarea erorilor relative maxime ale unei aproximante pe baza cifrelor sigure ale acesteia

Să considerăm numărul real x și x^n o aproximantă a sa cu k cifre sigure. Fie a_n prima cifră a numărului x și a aproximantei x^n , ($a_n \neq 0$).

Erorile absolute maxime fără regula de completare și cu regula de completare sînt date respectiv de

$$A = 10^{n-k+1} \text{ și } A = \frac{1}{2} 10^{n-k+1}.$$

Erorile relative maxime în aceste cazuri vor fi deduse din

$$E = \frac{A}{|x|}$$

unde vom avea în vedere că $x \geq a_n 10^n$, care fără regula de completare conduce la

$$E \leq \frac{10^{n-k+1}}{a_n 10^n} = \frac{1}{a_n 10^{k-1}}, \text{ deci } E \leq \frac{1}{a_n 10^{k-1}},$$

iar cu regula de completare conduce la

$$E \leq \frac{10^{k-k+1}}{2a_n 10^k} = \frac{1}{2a_n 10^{k-1}} \text{ deci } E \leq \frac{1}{2a_n 10^{k-1}}.$$

Din cele demonstrate rezultă :

Teoremă. Fiind dat un număr x și o aproximantă a sa x^* cu k cifre sigure, erorrea relativă maximă a lui x^* este mai mică sau egală cu $\frac{1}{a_n 10^{k-1}}$ fără regula de completare și mai mică sau egală cu $\frac{1}{2a_n 10^{k-1}}$ cu regula de completare, unde a_n este prima cifră nenulă de la stînga lui x^* .

Este ușor de remarcat că erorile relative maxime exprimate în procente sau nu, pot fi antecalulate deoarece depind numai de prima cifră a numărului și de numărul de cifre sigure, astfel încît se poate întocmi un tabel de erori relative maxime. Astfel de tabele sînt întocmite și se află în multe formulare matematice de unde ele pot fi luate pentru a fi folosite.

Dăm și noi un astfel de tabel în care sînt trecute erorile relative maxime în procente.

Tabelul III.1

Erorile relative maxime cînd se cunoaște a_n și k cu regula de completare

Prima cifră semnificativă a_n	Numărul de cifre sigure k							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	50	5,0	0,50	0,050	0,0050	0,00050	0,000050	0,0000050
2	25	2,5	0,25	0,025	0,0025	0,00025	0,000025	0,0000025
3	17	1,7	0,17	0,017	0,0017	0,00017	0,000017	0,0000017
4	12	1,2	0,12	0,012	0,0012	0,00012	0,000012	0,0000012
5	10	1,0	0,10	0,010	0,0010	0,00010	0,000010	0,0000010
6	8,3	0,83	0,083	0,0083	0,00083	0,000083	0,0000083	0,00000083
7	7,1	0,71	0,071	0,0071	0,00071	0,000071	0,0000071	0,00000071
8	6,3	0,63	0,063	0,0063	0,00063	0,000063	0,0000063	0,00000063
9	5,6	0,56	0,056	0,0056	0,00056	0,000056	0,0000056	0,00000056

Exemple :

Fie numărul

$$x = 27,24536$$

care are primele 5 cifre sigure. Să se determine eroarea relativă maximă prin calcul și apoi confruntînd rezultatul cu tabelul de valori.

Din calcul știm că fără regula de completare avem

$$E = \frac{1}{a_n 10^{k-1}}$$

unde, pentru cazul nostru, $a_n = 2$ și $k = 5$. Deci,

$$E = \frac{1}{2 \cdot 10^4} = 0,00005.$$

Cu regula de completare, avem

$$E = \frac{1}{2a_n 10^{k-1}}$$

care, cu datele problemei, dă

$$E = \frac{1}{4 \cdot 10^4} = 0,000025,$$

adică

$$E = 0,0025 \%,$$

căutând în tabel pe linia 2, coloana 5 găsim același rezultat.

III.10. Determinarea numărului de cifre sigure ale unei aproximante când se cunoaște eroarea relativă maximă a ei

Să considerăm prin ipoteză, eroarea relativă a aproximantei x^* a lui x cu eroare relativă maximă, egală cu :

$$E = \frac{1}{s \cdot 10^p}, \text{ unde } 1 \leq s \leq 9.$$

Folosind rezultatele din paragraful precedent deducem că numărul k de cifre sigure ale aproximantei x^* este cel mai mare număr natural k pentru care este verificată inegalitatea :

$$\frac{1}{s \cdot 10^p} \leq \frac{1}{a_n \cdot 10^{k-1}},$$

adică,

$$s \cdot 10^p \geq a_n \cdot 10^{k-1},$$

ceea ce este echivalent cu

$$10^{k-p-1} \leq \frac{s}{a_n}.$$

a) Dacă $s \geq a_n$,

rezultă

$$10^{k-p-1} \leq 1 \leq \frac{s}{a_n}.$$

Deci trebuie să avem,

$$k - p - 1 \leq 0,$$

de unde deducem $k \leq p + 1$.

b) Dacă $s < a_n$,
 rezultă

$$10^{k-p-1} \leq \frac{1}{10} < \frac{s}{a_n},$$

de unde

$$k - p - 1 \leq -1 \text{ sau } k \leq p.$$

Avem deci :

Teoremă. Dacă eroarea relativă maximă a aproximantelor unui număr este $\frac{1}{s \cdot 10^p}$ (s și p date) cu $1 \leq s \leq 9$ și $p \in \mathbb{N}$, aproximantele cu $p + 1$ cifre sigure fiind $s \geq a_n$ și p cifre sigure fiind $s < a_n$.

Întocmai ca și în cazul precedent se pot întocmi tabele pentru determinarea cifrelor sigure pentru erori relative maxime date.

Dăm în continuare tabelul cu cifrele sigure pentru câteva valori ale erorii relative maxime pentru

$$a_n = 1, 2, 3, \dots, 9.$$

Tabelul III.2

a_n	E			
	5%	1%	0,5%	0,1%
1	2	3	3	4
2	2	2	3	3
3	1	2	2	3
4	1	2	2	3
5	1	2	2	3
6	1	2	2	3
7	1	2	2	3
8	1	2	2	3
9	1	2	2	3

Exemple :

1. Fie $x^* = 24,38256$ o aproximantă a unui număr x care are eroarea relativă $E = \frac{1}{50\,000}$. Să se afle numărul de cifre sigure.

$$E = \frac{1}{5 \cdot 10^4}$$

deci $s = 5$ și $p = 4$. Avind $a_n = 2 < s$ rezultă $k = p + 1 = 5$, încît x^* are primele 5 cifre din stînga sigure.

2. Fie aproximantele lui π date cu o eroare relativă maximă de 0,5%. Să se afle numărul de cifre sigure ale aproximantelor.

Folosind tabelul III.2 se găsește la intersecția liniei a treia cu coloana 0,5% numărul 2, deci aproximanta are două cifre sigure.

III.11. Efectuarea sumelor și diferențelor cu aproximante

Aproximantele fiind numere raționale operațiile de adunare și scădere cu acestea nu se deosebesc cu nimic de aceleași operații efectuate cu numerele raționale. Ceea ce interesează în mod deosebit este eroarea transmisă la rezultat.

Fie numerele reale x_1 și x_2 și aproximantele lor x_1^* și x_2^* cu erorile absolute a_1 și a_2 . Vom considera ca aproximantă a sumei, suma celor două aproximante și deci eroarea absolută a sumei va fi dată de

$$|(x_1^* + x_2^*) - (x_1 + x_2)| = a.$$

Acastă relație se mai poate scrie

$$|(x_1^* - x_1) + (x_2^* - x_2)| \leq |x_1^* - x_1| + |x_2^* - x_2| = a_1 + a_2,$$

adică,

$$a \leq a_1 + a_2$$

Este ușor de văzut că putem generaliza această relație pentru o sumă cu un număr finit de termeni, fapt ce ne permite să enunțăm rezultatul prin următoarea teoremă.

Teoremă Eroarea absolută a aproximantei unei sume finite de termeni, numere reale, este mai mică sau cel mult egală cu suma erorilor absolute ale aproximantelor termenilor.

Considerăm, de asemenea, numerele reale x_1 și x_2 și aproximantele lor x_1^* și x_2^* erorile absolute maxime fiind A_1 și A_2 iar ca aproximantă a sumei, suma celor două aproximante. Ne întrebăm care este relația între eroarea absolută a sumei și erorile absolute ale aproximantelor termenilor sumei?

Dacă $x_1^* - x_1 = x^*$ este o aproximantă a sumei $x_1 + x_2 = x$, eroarea absolută a sumei aproximantelor este dată de

$$x^* - x = (x_1^* + x_2^*) - (x_1 + x_2) = |(x_1^* - x_1) + (x_2^* - x_2)| \leq |x_1^* - x_1| + |x_2^* - x_2|,$$

adică

$$a \leq a_1 + a_2$$

și avînd în vedere definiția dată pentru eroarea absolută maximă la III.4.2 avem $a_1 \leq A_1$ și $a_2 \leq A_2$, deci

$$a_1 + a_2 \leq A_1 + A_2,$$

adică

$$a \leq A_1 + A_2.$$

Deoarece această relație se poate extinde la o sumă cu un număr finit de termeni, putem da următoarea teoremă :

Teoremă. Eroarea absolută a sumei este mai mică sau cel mult egală cu suma erorilor absolute maxime ale termenilor sumei.

De asemenea, putem considera ca eroare maximă a sumei însăși suma erorilor absolute maxime, deoarece notînd

$$A_1 + A_2 = A$$

avem

$$a \leq A.$$

Cum și această relație se poate extinde la o sumă cu un număr finit de termeni, și utilizînd în acest caz noțiunea de *eroare absolută maximă a sumei*, avem teorema :

Teoremă. Eroarea absolută maximă a unei sume este egală cu suma erorilor absolute maxime ale termenilor sumei.

În ceea ce privește eroarea relativă maximă a lui x^* care reprezintă suma celor două aproximante x_1^* și x_2^* ale numerelor reale x_1 și x_2 considerate, ea este dată de

$$E = \frac{A}{|x|} \text{ sau } |x|E = A.$$

Însă

$$A = A_1 + A_2$$

și

$$A_1 = |x_1|E_1, A_2 = |x_2|E_2,$$

deci

$$|x|E = |x_1|E_1 + |x_2|E_2,$$

sau

$$E = \frac{|x_1|}{|x|} E_1 + \frac{|x_2|}{|x|} E_2,$$

adică

$$E = \frac{|x_1|E_1 + |x_2|E_2}{|x_1 + x_2|}, \text{ deoarece } x = x_1 + x_2.$$

Această relație poate fi generalizată pentru un număr n finit de termeni și utilizînd semnul Σ pentru sumă avem

$$E = \frac{\sum_{i=1}^n A_i}{\left| \sum_{i=1}^n x_i \right|}.$$

Dacă în exprimația anterioară a lui E dată pentru două numere presupunem că avem :

$$E_1 \leq E_2,$$

atunci

$$\frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 + x_2|} E_1 \leq E \leq \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 + x_2|} E_2.$$

Și această relație poate fi generalizată pentru un număr n finit de termeni obținându-se

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\left| \sum_{i=1}^n x_i \right|} \cdot \min(E_i) \leq E \leq \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\left| \sum_{i=1}^n x_i \right|} \max(E_i),$$

unde am notat cu $\max(E_i)$ cea mai mare dintre erorile relative maxime ale termenilor, iar cu $\min(E_i)$ cea mai mică dintre erorile relative maxime ale termenilor sumei.

Ultimele două relații dau posibilitatea evidențierii a două importante observații cu privire la aprecierea erorii relative a aproximantei unei sume.

Observația 1. Eroarea relativă maximă a unei sume de aproximante de același semn este cuprinsă între cea mai mică și cea mai mare dintre erorile relative maxime ale termenilor sumei.

Într-adevăr, pentru toți x_i de același semn avem

$$\sum_{i=1}^n |x_i| = \left| \sum_{i=1}^n x_i \right|$$

și deci ultima relație devine

$$\min(E_i) \leq E \leq \max(E_i).$$

Observația 2. Eroarea relativă maximă a unei sume algebrice de aproximante, poate depăși, în general, pe cea mai mare dintre erorile relative maxime ale termenilor sumei.

Într-adevăr, pentru cazul că nu toți x_i au același semn avem

$$\sum_{i=1}^n |x_i| > \left| \sum_{i=1}^n x_i \right|$$

și deci

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\left| \sum_{i=1}^n x_i \right|} > 1$$

înclt există în general posibilitatea ca E să depășească pe $\max(E_i)$.

Exemple :

1. Să se calculeze cu șase cifre sigure suma

$$x = 234,172 + 26,5736 + 8,75735.$$

Pentru fiecare număr, cele șase cifre sînt sigure deci suma poate să aibă cel mult șase cifre sigure așa încît reținem de la cel mai mare număr toate cifrele, iar la celelalte numere aplicăm regula de rotunjire (regula completării) astfel încît fiecare număr să aibă după virgulă atîtea zecimale, cît numărul care are cele mai puține zecimale, astfel,

$$\begin{array}{r} 234,172 \\ 26,574 \\ 8,757 \\ \hline 269,503 \end{array}$$

2. Să se calculeze eroarea absolută maximă a sumei

$$x = 4\,597,273 + 872,9736 + 0,47083$$

unde erorile absolute sînt indicate pentru fiecare număr, de ordinul ultimei sale cifre.

Avem deci erorile absolute ale numerelor date de

$$\frac{1}{10^3}, \quad \frac{1}{10^4}, \quad \frac{1}{10^5},$$

asa încît eroarea absolută maximă este

$$\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} = \frac{100 + 10 + 1}{10^5} < \frac{200}{10^5} = \frac{2}{10^3}.$$

Aplicînd regula completării, avem,

$$\begin{array}{r} 4\,597,273 \\ 872,974 \\ 0,480 \\ \hline 5\,470,727 \end{array}$$

și eroarea absolută este mai mică decît $\frac{2}{10^3}$.

De remarcat că și în cazul aproximării prin trunchiere (aproximarea canonică) eroarea absolută a sumei rămîne mai mică decît eroarea absolută maximă.

La aceeași aproximare a sumei ajungem și dacă considerăm la termenii sumei o zecimală peste ordinul cifrei la care se face aproximarea, adică în loc ca ultima cifră să fie cifra care dă eroarea absolută $\frac{1}{10^n}$, luăm ca ultimă cifră zecimală pe aceea care dă eroarea $\frac{1}{10^{n+1}}$, iar după efectuarea sumei aplicăm rezultatului metoda completării.

Deoarece eroarea absolută maximă a unei sume aritmetice este egală cu suma erorilor absolute maxime ale termenilor, erorile foarte mici ale unor termeni pot fi neglijate. De aceea nu are sens să păstrăm prea multe cifre la termenii cu o precizie mai mare.

Să analizăm acum cazul diferenței a două numere reale. Fie x_1^* și x_2^* aproximantele numerelor reale x_1 și x_2 , iar a_1 și a_2 erorile absolute ale aproximantelor. Deoarece diferența $x = x_1 - x_2$ și o aproximantă a sa $x^* = x_1^* - x_2^*$ sînt sume algebrice, unele rezultate obținute pentru suma algebrică sînt aplicabile și în cazul diferenței. Utilizînd noțiunea de *eroare absolută maximă a unei diferențe* avem următoarea teoremă pe care o enunțăm iată a o demonstra :

Teoremă. Eroarea absolută maximă a unei diferențe este egală cu suma erorilor absolute maxime ale termenilor diferenței.

Tot din rezultatele obținute la suma algebrică vom reaminti distincția a două cazuri care rezultă din *Observația 2*, făcută în acest paragraf :

a) cînd descăzutul și scăzătorul, avînd același semn, diferă mult ca mărime a valorilor absolute, atunci eroarea relativă maximă a diferenței se determină înlocuind ca pentru sumă,

b) cînd descăzutul și scăzătorul, avînd același semn, au valorile absolute foarte apropiate, erori mici ale termenilor pot atrage după ele o eroare relativă maximă foarte mare a diferenței.

Exemple :

1. Să se calculeze diferența

$$x = x_1 - x_2,$$

unde

$$x_1 = 18,2379 \text{ și } x_2 = 18,2374$$

sînt numere cu valori apropiate.

Considerînd aproximantele obținute prin rotunjire la cifra miilor avem

$$x_1^* = 18,238, \quad x_2^* = 18,237$$

cu erorile absolute

$$a_1 = 0,0001 \text{ și } a_2 = 0,0004.$$

Rezultă erorile relative ale termenilor

$$e_1 = \frac{0,0001}{18,2379} = 0,000005; \quad e_2 = \frac{0,0004}{18,2374} = 0,00002.$$

Dar

$$x = x_1 - x_2 = 0,0005 \text{ și } x^* = x_1^* - x_2^* = 0,001.$$

Deoarece

$$a = |x^* - x| \leq e = \frac{a}{|x|},$$

avem

$$a = 0,0005$$

și eroarea relativă a diferenței

$$e = \frac{0,0005}{0,0005} = 1$$

care arată că eroarea relativă a diferenței este foarte mare în comparație cu erorile relative ale termenilor.

2. Să se calculeze diferența

$$x = x_1 - x_2,$$

unde

$$x_1 = 23,4759, \quad x_2 = 3,4753$$

sînt numere cu valori absolute ce diferă mult între ele.

Considerînd aproximațiile obținute prin rotunjire la cifra zecimilor avem

$$x_1^* = 23,476 \text{ și } x_2^* = 3,475$$

cu erorile absolute

$$\alpha_1 = 0,0001 \text{ și } \alpha_2 = 0,0003,$$

rezultă

$$\epsilon_1 = \frac{0,0001}{23,4759} \approx 0,000004 \text{ și } \epsilon_2 = \frac{0,0003}{3,4753} \approx 0,00008$$

dar

$$x = x_1 - x_2 = 20,0006 \text{ și } x^* = x_1^* - x_2^* = 20,001$$

deci

$$\alpha = 0,0004,$$

de unde

$$\epsilon = \frac{0,0004}{20,0006} \approx 0,00002$$

de unde se vede că eroarea relativă este foarte apropiată de erorile relative ale termenilor.

Presupunînd, deci, că cei doi termeni ai diferenței, avînd același semn, au diferența mare între module, ținîndu-se seama de rezultatele obținute la sumă dăm următoarea regulă fără demonstrație :

III.11.1. *Regulă.* Pentru calcularea diferenței între două aproximante, care aproximează două numere cu erori absolute maxime $\frac{1}{10^m}$ și respectiv $\frac{1}{10^{n+m}}$ ($n, m \in \mathbf{N}$), se rețin cîte n zecimale de la fiecare aproximantă (prin lipsă sau adaos) și se face diferența. Eroarea absolută maximă a diferenței este de $\frac{1}{10^n}$.

Exemple :

1. Să se calculeze diferența

$$0,035746 - 0,02379$$

știînd că erorile absolute maxime sînt de $\frac{1}{10^4}$ și respectiv $\frac{1}{10^5}$. Reținînd cîte trei zecimale la ambele numere avem aproximațiile cu care efectuăm diferența. Eroarea absolută maximă a diferenței este $\frac{1}{10^3}$.

$$0,036 - 0,024 = 0,012$$

2. Să se calculeze diferența

$$543,245 - 0,214312$$

știind că erorile absolute maxime sînt date de $\frac{1}{10^3}$ și respectiv $\frac{1}{10^6}$. Reținem deci cîte trei zecimale la fiecare și cu aproximantele respective efectuăm diferența. Eroarea absolută maximă a diferenței este $\frac{1}{10^3}$

$$543,245 - 0,214 = 543,031.$$

3. Să se calculeze eroarea relativă a diferenței

$$573,23746 - 573,23742$$

știind că erorile absolute sînt, la ambele numere, mai mici decît $0,5 \cdot \frac{1}{10^6}$.

Deoarece diferența lor este foarte mică, 0,00004, iar eroarea absolută a diferenței fiind mai mică decît $0,5 \cdot \frac{1}{10^6}$, nu putem estima eroarea relativă a rezultatului (observația 2 din acest paragraf).

III.12. Efectuarea produselor și citurilor cu aproximante

Să considerăm numerele reale x_1 și x_2 cu aproximantele x_1^* și x_2^* avînd erorile absolute a_1 și, respectiv, a_2 . Fie $x^* = x_1^* \cdot x_2^*$ o aproximantă a lui $x = x_1 \cdot x_2$ cu eroare absolută

$$a = |x_1^* \cdot x_2^* - x_1 \cdot x_2|$$

avem

$$x_1 = x_1^* \pm a_1 \text{ și } x_2 = x_2^* \pm a_2$$

deci

$$x_1 \cdot x_2 = x_1^* \cdot x_2^* \pm x_1^* \cdot a_2 \pm x_2^* \cdot a_1 \pm a_1 \cdot a_2.$$

Calculînd $x_1^* \cdot x_2^* - x_1 \cdot x_2$ și trecînd la valori absolute avem $a = |x_1^* \cdot x_2^* - x_1 \cdot x_2| = | \pm x_1^* \cdot a_2 \pm x_2^* \cdot a_1 \pm a_1 \cdot a_2 |$.

de unde

$$a \leq |x_1^*| a_2 + |x_2^*| a_1 + a_1 a_2,$$

care arată că eroarea absolută a produsului de doi factori este mai mică sau cel mult egală cu suma produselor dintre un factor și eroarea absolută a celui-lalt mărită cu produsul erorilor absolute ale celor doi factori.

Împărțind relația precedentă cu $|x| = |x_1| \cdot |x_2|$ avem

$$\frac{a}{|x|} \leq \frac{|x_1^*| \cdot a_2}{|x_1| \cdot |x_2|} + \frac{|x_2^*| \cdot a_1}{|x_1| \cdot |x_2|} + \frac{a_1 \cdot a_2}{|x_1| \cdot |x_2|}.$$

Ținând seama de faptul că $\left| \frac{x_1^*}{x_1} \right|$ și $\left| \frac{x_2^*}{x_2} \right|$ au valorile foarte apropiate de valoarea 1, precum și că produsul $\frac{a_1}{|x_1|} \cdot \frac{a_2}{|x_2|}$ fiind foarte mic, în comparație cu suma lor, poate fi neglijat, se poate scrie între erorile relative maxime relația

$E \approx E_1 + E_2$, unde semnul „ \approx ” înseamnă „aproximativ egal”. Utilizând noțiunea de *eroare relativă maximă a produsului* în cazul produsului cu aproximante avem teorema :

Teoremă. Eroarea relativă maximă a produsului a două aproximante este aproximativ egală cu suma erorilor relative maxime ale aproximantelor.

Generalizarea acestui rezultat se poate ușor extinde la orice produs cu un număr finit de factori și în acest caz eroarea relativă maximă a produsului este aproximativ egală cu suma erorilor relative maxime ale factorilor.

În cazul în care erorile relative pentru n factori sînt valori apropiate, eroarea relativă maximă a produsului va fi aproximativ egală cu de n ori cea mai mare dintre erorile relative ale factorilor. Invers, ca să obținem produsul, cu o anumită eroare relativă, a n factori avînd valori apropiate, trebuie să luăm factorii cu erori relative de n ori mai mici decît eroarea relativă a produsului.

Propoziție : Produsul are cu una sau cel mult două cifre sigure mai puțin decît cel mai mic dintre numerele de cifre sigure ale tuturor factorilor și invers pentru ca produsul să aibă n cifre sigure trebuie să luăm toți factorii cu $n + 1$ sau $n + 2$ cifre sigure.

Demonstrație :

Fie, de exemplu, x_1^* și x_2^* două aproximante cu n cifre sigure și se cere să se calculeze numărul de cifre sigure ale produsului lor.

Dacă $x^* = x_1^* \cdot x_2^*$, atunci $E \approx E_1 + E_2$,
adică

$$\frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^{n-1}} = \frac{2}{10^{n-1}} = \frac{10}{5 \cdot 10^{n-1}} < \frac{1}{10^{n-2}}$$

deci în cel mai nefavorabil caz produsul va avea $n - 2$ cifre sigure.

Exemple .

1. Să se calculeze produsul

$$x = 1,2478 \cdot 0,9735 \cdot 2,8679$$

cu o eroare relativă maximă de $\frac{1}{10^2}$, adică cu două zecimale sigure.

Ținînd mai înții factorii cu toate zecimalele avem :

$$x = 1,2478 \times 0,9735 \times 2,8679 = 3,483733631079$$

la care reținem doar primele două zecimale aplicînd rotunjirea, deci,

$$x^* = 3,48.$$

Considerind numai cele trei zecimale la fiecare număr (adică o zecimală în plus față de precizia verităţii pentru produs) avem:

$$x^* = 1,247 \times 0,973 \times 2,867 = 3,478619977,$$

unde, reţinind numai două zecimale aplicând rotunjirea, avem

$$x^* = 3,48$$

în care se poate vedea că primele două cifre zecimale coincid cu ale rezultatului corect.

Considerind însă numai două cifre zecimale la fiecare număr avem

$$x = 1,24 \times 0,97 \times 2,86 = 3,440008$$

din care se vede că a doua zecimală este eronată.

2. Să se determine produsul şi eroarea relativă maximă a produsului

$$x = 1,4750 \cdot 1,2804$$

ştiind că factorii au eroarea relativă maximă de $\frac{1}{10^4}$ şi $\frac{1}{10^4}$, vom considera

$$x \approx 1,475 \cdot 1,280 = 1,89000,$$

unde vom reţine numai două zecimale după aplicarea rotunjirii deci

$$x^* = 1,90 \text{ cu eroarea relativă maximă de } \frac{1}{10^3}.$$

Să cercetăm acum cazul citului de două numere reale.

Fie x_1 şi x_2 , cele două numere, x_1^* şi x_2^* aproximantele lor cu erorile absolute a_1 şi a_2 . Notăm cu $x^* = \frac{x_1^*}{x_2^*}$ o aproximantă a lui $x = \frac{x_1}{x_2}$ cu eroarea absolută a .

Avem

$$x = x^* = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^*}{x_2^*} = \frac{x_1^* - a_1}{x_2^* + a_2} = \frac{x_1^*}{x_2^*} \cdot \frac{x_1^* \cdot x_2^* + x_2^* \cdot a_1 - x_1^* \cdot x_2^* + x_1^* \cdot a_2}{x_2^*(x_2^* + a_2)},$$

adică

$$a = \frac{|x_1^* \cdot a_2 + x_2^* \cdot a_1|}{x_2^*(x_2^* + a_2)},$$

sau

$$a \leq \frac{|x_1^*| \cdot |a_2| + |x_2^*| \cdot |a_1|}{|x_2^*| \cdot |x_2^* + a_2|} = \frac{|x_1^*| \cdot |a_2| + |x_2^*| \cdot |a_1|}{|x_2^*| \cdot |x_2|}.$$

Împărţind ultima relaţie cu $\frac{|x_1|}{|x_2|}$ avem

$$e \leq \frac{|x_2| \cdot |x_1^*| \cdot |a_2|}{|x_1| \cdot |x_2| \cdot |x_2^*|} + \frac{|x_2| \cdot |x_2^*| \cdot |a_1|}{|x_1| \cdot |x_2| \cdot |x_2^*|} = \dots$$

Prin simplificare se obține

$$\epsilon \leq \frac{|x_1^*|}{|x_1|} \cdot \frac{a_2}{|x_2^*|} + \frac{a_1}{|x_1|}.$$

Însă cum

$$\frac{|x_1^*|}{|x_1|} \approx 1 \text{ și } \frac{a_2}{|x_2^*|} \approx \frac{a_2}{|x_2|},$$

obținem

$$\epsilon \approx \frac{a_2}{|x_2|} + \frac{a_1}{|x_1|},$$

unde considerând erori relative maxime avem

$$E \approx E_1 + E_2$$

Având în vedere ultima relație obținută se poate afirma că eroarea relativă maximă a citului de două aproximante este aproximativ egală cu suma erorilor relative maxime ale aproximantelor.

Propoziție: Rezultatul împărțirii a două aproximante are cu una sau cel mult două cifre sigure mai puțin decât cel mai mic dintre numerele de cifre sigure ale deîmpărțitului și împărțitorului și invers, pentru ca la cit să obținem n cifre sigure trebuie să luăm numerele cu $n + 1$ sau $n + 2$ cifre sigure.

Demonstrație:

Fie aproximantele x_1^* și x_2^* având n cifre sigure. Să se calculeze numărul de cifre sigure ale citului lor.

$$\text{Dacă } x^* = \frac{x_1^*}{x_2^*}, \text{ atunci } E \approx E_1 + E_2,$$

adică

$$\frac{1}{10^{n-2}} + \frac{1}{10^{n-1}} = \frac{2}{10^{n-1}} = \frac{10}{5 \cdot 10^{n-1}} < \frac{1}{10^{n-2}},$$

deci în cazul cel mai nefavorabil citul va avea $n - 2$ cifre sigure.

Exemple:

1. Să se calculeze citul

$$\tau = \frac{1,26472}{0,25796}$$

cu o eroare relativă maximă de $\frac{1}{10^1}$, adică cu două zecimale sigure.

Efectuând mai întâi citul cu numerele nerotunjite avem

$$x = 1,26472 : 0,25796 = 4,90277...$$

rotunzind numai primele două zecimale aplicând rotunjirea se obține

$$x^* = x 4,90.$$

Considerind aproximantele de împărțitului și împărțitorului cu cîte 4 zecimale vom avea

$$x^* = 1,2647 : 0,2580 = 4,900,$$

unde se vede că avem citul cu primele zecimale aceleși ca mai înainte.

Efectuind împărțirea între două aproximante avînd trei zecimale se obține

$$x^* = 1,265 : 0,258 = 4,903,$$

cu de primele două zecimale sînt aceleși ca și în cazurile de mai înainte.

Considerind însă aproximantele numai cu primele două zecimale avem

$$x^* = 1,26 : 0,25 = 5,04,$$

ceea ce arată că rezultatul este eronat.

2. Să se calculeze citul

$$x = \frac{2,43569432}{1,264572973}$$

cu o eroare relativă a citului de $\frac{1}{10}$. În acest caz aproximantele de împărțitului și împărțito-

rii, nu vor avea mai mult de trei zecimale adică o eroare absolută $\frac{1}{10^3}$.

Deci

$$a_1^* = 2,436 \text{ și } x_1^* = 1,265$$

și vom

$$\frac{x_1^*}{a_1^*} = \frac{2,436}{1,265} = 1,92$$

În citul citul cu eroare absolută de $\frac{1}{10}$ este dat de

$$x^* = \frac{a_1^*}{x_1^*} = 1,9$$

III 13 Ridicarea la putere a aproximantelor

Pentru ridicarea la o putere, de exponent număr natural n , a aproximantei unui număr real x , putem să considerăm că avem produsul cu n factori egali între ei.

De aceea, fie x numărul real și x^* o aproximantă a sa care are eroarea absolută a . Este normal să considerăm pentru x^n aproximanta $(x^*)^n$ astfel încît avem

$$x^n = (x^* \pm a)^n.$$

Pentru a afla rezultatul într-o astfel de operație vom analiza cazurile :

1. Cînd exponentul $n = 2$, avem

$$x^2 = (x^* \pm a)^2 = (x^*)^2 \pm 2x^* \cdot a + a^2,$$

de unde

$$x^2 - (x^*)^2 = \pm 2x^* \cdot a + a^2.$$

Notînd cu $a^{(2)}$ eroarea absolută a puterii de exponent 2, rezultă

$$a^{(2)} = |x^2 - (x^*)^2| = |\pm 2x^*a + a^2|,$$

și avînd în vedere că a^2 este o cantitate ce poate fi neglijată comparînd o cu a , avem :

$$a^{(2)} \leq 2|x^*|a,$$

care împărțită cu $|x|^2$ devine

$$\frac{a^{(2)}}{|x|^2} \leq 2 \frac{|x^*|}{|x|} \cdot \frac{a}{|x|}.$$

Notînd cu $e^{(2)}$ eroarea relativă a puterii de exponent 2 și avînd în vedere că $\frac{|x^*|}{|x|} \approx 1$ avem :

$$e^{(2)} \approx 2e \text{ unde } e = \frac{a}{|x|}.$$

Avem deci :

Eroarea relativă a puterii de exponent 2 este aproximativ egală cu dublul erorii relative a bazei.

2. Cînd exponentul $n = 3$, avem

$$x^3 = (x^* - a)^3 = (x^*)^3 \pm 3(x^*)^2a + 3x^*a^2 \pm a^3$$

sau

$$|x^3 - (x^*)^3| = |\pm 3(x^*)^2a + 3x^*a^2 \pm a^3|$$

Notînd cu $a^{(3)}$ eroarea absolută a puterii de exponent 3, rezultă

$$a^{(3)} \leq 3|x^*|^2a + 3|x^*|a^2 + a^3.$$

Împărțind cu $|x|^3$, se obține

$$\frac{a^{(3)}}{|x|^3} \leq 3 \frac{|x^*|^2}{|x|^2} \cdot \frac{a}{|x|} + 3 \frac{|x^*|}{|x|} \cdot \frac{a^2}{|x|^2} + \frac{a^3}{|x|^3}.$$

Deoarece $\frac{a^{(3)}}{|x|^3}$ reprezintă eroarea relativă, pe care o notăm cu $e^{(3)}$ și înfiind seama de valorile neînsemnate pe care le au termenii $\frac{a^2}{|x|^2}$ și $\frac{a^3}{|x|^3}$ precum și de $\frac{|x^*|}{|x|} \approx 1$, avem

$$e^{(3)} \approx 3e.$$

De unde, rezultă că :

Eroarea relativă a puterii de exponent 3 este aproximativ egală cu de 3 ori eroarea relativă a bazei.

Este evident că relațiile au loc și în cazul erorilor relative în sine care sînt niște majorante ale erorilor relative.

Adică

$$E^{(2)} \approx 2E \text{ si } E^{(3)} \approx 3E.$$

Având în vedere că puterea de exponent n , număr natural, a unui număr oarecare este produsul de n factori egali cu numărul dat, putem extinde regula produsului de n factori la puterea de exponent n .

Deci putem considera

$$E^{(3)} \approx E^{(2)} + E \approx 2E + E = 3E,$$

$$E^{(4)} \cong E^{(3)} + E \approx 3E + E = 4E,$$

A set of small navigation icons typically found in Beamer presentations, including symbols for back, forward, search, and other slide controls.

$$E^{(n)} \cong E^{(n-1)} + E \cong (n-1)E + E = nE.$$

Pentru aplicații în cazul puterilor de exponent 2 sau 3 se pot folosi rezultatele obținute la înmulțire și de aceea nu vom indica alte procedee.

EXERCITII ȘI PROBLEME

1. Să se scrie cele două aproximație pentru numerele :

8 752,9746 ; 0,0007578945,

4. Ce fel de aproximație este zero pentru numărul real x ?

3. Dându-se două numere raționale x_1 și x_2 astfel încât $x_1 < x_2$, care dintre ele poate fi considerat aproximantă pentru celălalt?

4. Se dă numărul $x = 2,7abc$ și o aproximație a sa $x^* = 2,797$. Ce cifre pot fi a, b, c pentru ca x^* să fie :

1°. o aproximantă prin lipsă ;

2°, o aproximantă prin exccs.

5. Să se aproximeze prin rotunjire numerele :

478,956025 ; 1,0047075 ; 7834500 ; -2,653049,

păstrându-se primele k zecimale și să se spună tipul aproximației (lipsă sau exces) unde $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

6. Să se aproximeze prin rotunjire numerele :

754 795,26 ; —465 376,572,

la cifra a n -a de la virgulă la stînga pentru $n = 1, 2, 3, 4, 5$, precizîndu-se tipul rotunjirii.

7. Să se facă aproximarea prin trunchiere și să se precizeze felul aproximației pentru numerele :

0,001754; 45 275476; 175,4827; 0,020765.

păstrându-se k zecimale unde $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

8. Să se facă aproximarea canonică (trunchiere) a numerelor :

$$1\,794\,536 ; -97\,453\,894 ; 6\,285\,139,799 ; 14\,379\,372,4568,$$

la cifra a n -a de la virgulă spre stînga pentru $n = 1, \dots, 6$ și să se precizeze de fiecare dată ce fel de aproximante sînt.

9. Dacă $x = \overline{a,bcd}$ și aproximanta sa $x^* = 8,2b$ care pot fi cifrele a, b, c, d pentru ca :

1°. x^* să fie o aproximantă prin lipsă ;

2°. x^* să fie o aproximantă prin exces ?

10. Se dau numerele $x_1 = \overline{3a1,5}$ și $x_2 = \overline{3ba}$. Să se determine cifrele a și b astfel ca x_1 să fie aproximantă pentru x_2 :

1°. prin lipsă ;

2°. prin exces.

Poate fi x_2 o aproximantă pentru x_1 prin lipsă sau prin exces ?

11. Se dau numerele $x_1 = \overline{3,a5}$ și $x_2 = \overline{3,5a}$. Care sînt cifrele ce pot fi puse în locul literei a pentru ca :

1°. x_1 să fie o aproximantă prin lipsă pentru x_2 ;

2°. x_2 să fie o aproximantă prin lipsă pentru x_1 ?

12. Se dau numerele $x_1 = \overbrace{0,0 \dots 0}^{k \text{ de zero}} aabb$ și $x_2 = \overbrace{0,0 \dots 0}^{k \text{ de zero}} abab$. Care este

relația între a și b pentru ca :

1°. x_1 să fie o aproximantă prin lipsă pentru x_2 ;

2°. x_1 să fie o aproximantă prin exces pentru x_2 ?

13. Se dau numerele :

$$x_1 = 0,0 \dots 0 \overline{abc} ;$$

$$x_2 = 0,0 \dots 0 \overline{acb} ;$$

$$x_3 = 0,0 \dots 0 \overline{bac} ; \text{ (Fiecare număr are } k \text{ zerouri consecutive)}$$

$$x_4 = 0,0 \dots 0 \overline{bca} ; \text{ (după virgulă.)}$$

$$x_5 = 0,0 \dots 0 \overline{cab} ;$$

$$x_6 = 0,0 \dots 0 \overline{cba}.$$

Știind că x_1 este o aproximantă prin lipsă pentru x_2 și x_2 o aproximantă prin exces pentru x_3 , să se cerceteze ce fel de aproximante formează fiecare număr în parte pentru celelalte ?

14. Știind că $x_1 = 0,5731\overline{a}$ este o aproximantă prin rotunjire pentru $x_2 = 0,5731\overline{b7}$ și că a este un pătrat perfect, să se stabilească ce cifre pot fi literele a, b ? Folosind configurația grafică a punctelor $P(a, b)$ unde a și b sînt cifrele stabilite mai înainte, să se arate că acestea sînt coliniare.

15. Viteza luminii în vid este $c = 299,776 \cdot 10^6$ m/s. În calcul este considerată 300 000 km/s. Care sînt erorile absolută și relativă ale aproximației ?

16. Să se determine aproximantele prin lipsă, respectiv prin adaos, cu o eroare absolută mai mică decât 0,0001 ale numerelor:

a) 543,054963; b) 4,29208759; c) 65,493455; d) 59,7829736;

e) 5 792 736,27; f) - 0,003.

17. Să se scrie cele două inegalități fundamentale în aproximarea numerelor precum și caracteristica pentru următoarele numere:

a) 4 753,5736; b) 1,756304; c) 0,5739843; d) 0,0004869;

e) -18 763,965; f) -7,29463; g) 0,826907; h) 0,00001.

18. Să se calculeze aproximanta lui $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$ cu eroarea absolută mai mică decât $\frac{1}{2 \cdot 10^3}$.

19. Să se calculeze aproximanta lui $\sqrt{20}$ cu eroarea absolută mai mică decât $\frac{1}{10^3}$.

20. Să se calculeze aproximanta lui π cu eroarea absolută mai mică decât $\frac{1}{2 \cdot 10^4}$.

21. Să se calculeze aproximanta numărului $\frac{22}{7}$ cu eroarea absolută mai mică decât $\frac{1}{10^3}$.

22. Să se calculeze aproximanta numărului $\frac{15}{7}$ cu eroarea absolută mai mică, decât $\frac{2}{113}$.

23. Poate fi aproximantă prin lipsă numărul π pentru numărul $\sqrt{10}$ cu o eroare absolută de $\frac{1}{10^2}$?

24. Luând pentru numerele e și π respectiv aproximantele $e^* = 2,71828$ și $\pi^* = 3,14159$, să se calculeze erorile lor absolute și relative.

25. Distanța de 37,25 km s-a măsurat cu o precizie de 1 m iar distanța de 78 m s-a măsurat cu o precizie de 1 mm. În ce caz măsurarea a fost mai bună?

26. Din două cântăriri succesive apreciem că masa unui corp este de 2,358 kg, iar eroarea absolută maximă este de 1 mg. Care este eroarea relativă maximă?

27. Măsurând unghiurile ascuțite ale unui teher găsim mărimile $29^{\circ}58'$ și $60^{\circ}2'$. Știind că mărimile adevărate ale unghiurilor sînt 30° și respectiv 60° , să se calculeze eroarea absolută maximă și eroarea relativă maximă în ambele cazuri.

28. Să se determine eroarea relativă maximă pentru aproximantele numărului π care are k cifre sigure ($k = 1, 2, 3, 4$) fără regula de completare și cu regula de completare folosind tabelul III.1.

29. Se dă numărul $e^2 = 2.718281828$ o aproximantă a numărului e cu 10 cifre sigure. Să se determine erorile absolute maxime și relative maxime fără și cu regula de completare și cu regula de completare.

30. Se considera $\frac{7}{11} \approx 0,637$. Să se calculeze erorile comise.

31. O aproximantă a lui $\sqrt{83}$ este 9,11. Să se stabilească ce erori s-au comis.

32. Numărul 9,803 este o aproximantă cu 4 cifre sigure a accelerației gravitaționale. Să se determine eroarea relativă maximă a aproximantei.

33. Eroarea absolută maximă a aproximantei lui $\sqrt{13}$ este de 1%. Să se determine numărul de cifre sigure ale acestei aproximante.

34. Să se determine numărul de cifre sigure ale aproximantei lui $\sqrt{1491}$, considerând succesiv că eroarea absolută maximă este 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 și 0,00001, folosind tabelul III.2.

35. Accelerația gravitațională la noi în țară (București) este $g_n = 9,803$ m/s². În calcule se utilizează $g = 9,8$ m/s². Care este eroarea? Dar în cazul când utilizăm $g = 10$ m/s²? Care sînt erorile absolute maxime și relativă maximă pentru aceste două aproximante?

36. Masa electronului în stare de repaus este $m_e = \frac{9,108}{10^{31}}$ g. Considerîndu-se în calcule $m_e = \frac{1}{10^{31}}$ g, care este eroarea aproximantei?

37. Constanta lui Planck este $h = \frac{6,625}{10^{34}}$ J·s. Determinați erorile absolute, absolute maxime, relative și relative maxime cînd considerăm aproximantele $h_1 = \frac{7}{10^{34}}$ J·s și $h_2 = \frac{6,6}{10^{34}}$ J·s.

38. Viteza magnetonului Bohr este $v_B = \frac{9.268}{10^{24}} \cdot \frac{1}{T}$. Determinați erorile absolute, absolute maxime, relative și relative maxime, cînd ca aproximante considerăm $v_{B1} = \frac{927}{10^{24}} \cdot \frac{1}{T}$, $v_{B2} = \frac{93}{10^{24}} \cdot \frac{1}{T}$ și $v_{B3} = \frac{1}{10^{24}} \cdot \frac{1}{T}$.

39. Masa moleculară relativă a acidului etanoic (CH₃COOH) este 60,05. Determinați erorile: absolută, absolută maximă, relativă și relativă maximă, cînd considerăm drept aproximante 60,1 și 60.

40. Determinări experimentale ale greutatei specifice a apei distilate (H₂O) au condus la următoarele rezultate, $\gamma_1 = 9.808,44021$ N/m³, $\gamma_2 = 9.809,7253$ N/m³ și $\gamma_3 = 9.792.312$ N/m³. În rezolvarea problemelor de

chimie sau fizică, descom. considerăm greutatea specifică a apei $\gamma = 9810$ N/m³. Să se determine erorile : absolute, absolute maxime, relative și relative maxime ale aproximantei γ , față de valorile marcate prin măsurători.

41. Măsurători ale densității mercurului la presiunea de 760 tori, a condus la valorile : $\rho_1 = 13.595,1$ kg/m³ și $\rho_2 = 13.545,7$ kg/m³. În rezolvarea unor probleme, considerăm densitatea mercurului $\rho = 13.600$ kg/m³. Determinați erorile : absolută, absolută maximă, relativă și relativă maximă ale aproximantei, în acest caz.

42. Să se calculeze suma :

$$0,816 + 1,173 + 1,6391 + 1,2928 + 0,7710 + 1,9768 + 2,1098$$

cu două zecimale sigure și apoi să se calculeze eroarea absolută maximă știind că pentru fiecare număr eroarea absolută este indicată de ultima lui zecimală.

43. Să se calculeze suma

$$759,43578 + 0,0072376 + 1,0051429$$

cu o eroare absolută de $\frac{1}{10^4}$. Pentru cazul în care erorile relative ale termenilor sumei sînt $\frac{1}{10^5}$, $\frac{1}{10^6}$ și respectiv $\frac{1}{10^7}$, să se calculeze eroarea relativă maximă a sumei.

44. Dacă suma numerelor

$$926,4598 + 1,5737983 + 0,027936$$

are eroarea absolută maximă $\frac{2}{10^2}$, ce pot fi erorile absolute ale numerelor ?

Dar dacă eroarea relativă a sumei este $\frac{1}{10^5}$, care pot fi erorile relative ale termenilor ?

45. Să se calculeze

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \frac{7}{8}$$

cu o eroare de $\frac{1}{10^3}$.

46. Să se calculeze cu exactitate și cu aproximație diferența

$$1.1823 - 0,205.$$

Care sînt erorile care se produc ?

47. Să se calculeze cu trei cifre sigure produsul

$$85,279432 \cdot 7,36972$$

48. Un mobil se deplasează cu viteza de 34,15 km/h timp de 2,15 ore. Să se determine eroarea relativă și numărul de cifre sigure ale aproximantei care dă spațiul parcurs de mobil.

49. Într-o mișcare circulară pe un cerc cu raza π un mobil se deplasează cu o viteză constantă $v = 2,71828$ în timpul t dat de rădăcina pozitivă a ecuației $x^2 + 4x - 1 = 0$. Să se calculeze eroarea relativă și numărul de cifre sigure ale aproximantei care dă spațiul parcurs de mobil când raza cercului, viteza mobilului și timpul sînt date cu trei cifre sigure.

50. Să se calculeze erorile absolute și relative ale numărului π când se iau următoarele aproximații

$$3; 3,14; 3 + \frac{10}{7}; \frac{355}{113}.$$

51. Să se calculeze volumul sferei

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

știind că $R = 0,5 + \alpha$ cu $|\alpha| \leq \frac{1}{10^3}$.

52. Să se calculeze cu aproximație de $\frac{1}{10^4}$ numărul

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}.$$

53. Numerele 863,1562 și 0,0725 sînt date cu o eroare absolută maximă de $\frac{1}{10^4}$. Care este eroarea absolută maximă a diferențelor lor? Dar eroarea relativă maximă?

54. Eroarea absolută maximă a diferenței,

$$53\,978,47978 - 3,27544,$$

este de $\frac{1}{10^4}$. Care pot fi erorile absolute maxime ale termenilor?

55. Să se stabilească eroarea relativă maximă a produsului $123,4792 \cdot 55,797 \cdot 5\,729,37$ știind că factorii au respectiv erorile relative indicate de ultima lor zecimală.

56. Cîte cifre sigure are produsul:

$$0,75397 \cdot 1,64285 \cdot 26,37492,$$

știind ca fiecare factor are toate cifrele sigure?

57. Să se calculeze cu două cifre sigure produsul:

$$0,75059732 \cdot 0,003579472 \cdot 0,400297594.$$

58. Să se calculeze cu primele două zecimale sigure produsul:

$$32,125472 \cdot 16,255463,$$

știind că unul din factori are primele trei zecimale sigure.

59. Să se stabilească eroarea relativă maximă a cîtului,

$$15,47983 : 3,12142,$$

știind că erorile relative ale deîmpărțitului și împărțitorului sînt date de ultimele lor zecimale.

60. Să se stabilească numărul de cifre sigure ale cîtului,

$$69,5793 : 23,1821,$$

știind că deîmpărțitul și împărțitorul au fiecare ultima zecimală cifră îndoielnică.

61. Să se calculeze cîtul,

$$0,849732 : 0,4235794,$$

avînd cel puțin primele două cifre sigure.

62. Să se calculeze cîtul,

$$56,379 : 28,378,$$

cu prima zecimală sigură știind că unul din factori are cel puțin două zecimale sigure.

63. Să se calculeze

$(24,5679436)^2$ astfel ca rezultatul să aibă prima zecimală sigură.

III.14. Operații logice

III.14.1. Introducere

Ați observat desigur că analiza și rezolvarea oricărei probleme se reduce, în ultimă instanță, la o înlănțuire de afirmații (propoziții sau fraze) care ne permit să tragem anumite concluzii.

De multe ori credem că am gîndit corect, că am judecat bine, dar lucrurile nu stau așa.

Astfel, plecând de la afirmația : „oamenii înalți sînt buni sportivi” mulți se găsesc să conchidă că „oamenii mei de statură nu sînt buni sportivi” ceea ce nu este adevărat.

Sau din propozițiile :

„Toți oamenii în vîrstă sînt înțelepți”

„Badea Ilie este înțelept”

să se deducă „Badea Ilie este în vîrstă”, afirmație incorectă, deoarece cele două propoziții nu ne permit să apreciem vîrsta lui Badea Ilie.

Un alt tip de greșeală de logică frecventă este negarea incorectă a propozițiilor.

De exemplu, se obișnuiește să se nege propoziția „Ionescu este deștept” prin „Ionescu este prost”, ceea ce nu este corect din punct de vedere al logicii, deoarece negația unei propoziții de tipul „A este B” este „A nu este B”, și nu „A este non-B”.

Și în raționamentele matematice pot apărea greșeli de logică. Astfel, este greșit ca din afirmația „dacă un triunghi are 2 unghiuri congruente atunci el este isoscel” să se deducă afirmația „dacă un triunghi are două unghiuri diferite atunci el nu este isoscel”.

Se pune atunci întrebarea : cum putem avea certitudinea că am raționat corect, că am dedus concluzii adevărate și că modul în care le-am obținut din informațiile inițiale este cel corect ?

Răspunsul la această întrebare ni-l dă *logica* - știința care descoperă și formulează legile gândirii corecte.

Logica s-a dezvoltat încă din antichitate, fiind fondată în secolul al IV-lea î.e.n. de Aristotel. Apropiată ca spirit atât de filozofie cît și de matematică, logica a beneficiat de aportul ambelor științe. Începînd din secolul al XIX-lea unii matematicieni și filozofi au încercat să studieze logica cu metode matematice. Ideea era să se realizeze și în logică acel salt calitativ reprezentat în matematică de trecerea de la rezolvarea aritmetică la rezolvarea algebrică. Pentru aceasta propozițiile au fost notate cu simboluri¹, cu ele efectuîndu-se operații respectînd anumite reguli. Ideea calculului logic, inițial formulată de Leibniz², a fost preluată de A. De Morgan³ și G. Boole⁴ care au pus bazele algebrei logicii.

Astfel, logica a devenit mai riguroasă și mai ușor de aplicat, nu numai în viața de toate zilele și în rezolvarea problemelor specifice diferitelor domenii științifice, dar și în dezvoltarea unor discipline cu pronunțat caracter practic, ca de pilda : programarea calculatoarelor, automatizări bazate pe circuite cu contacte și relee sau pe circuite electronice etc.

¹ Logica matematică se mai numește și logică simbolică.

² G. W. Leibniz (1646 - 1716), matematician și filozof german.

³ Augustus De Morgan, matematician englez (1806 - 1871).

⁴ George Boole, matematician și logician irlandez (1815 - 1864).

La noi în țară, o contribuție deosebită în dezvoltarea logicii matematice au avut-o oamenii de știință Gr. C. Moisil, E. Mihăilescu, O. Onicescu, A. Dumitriu, M. Tîrnoveanu, școala românească de logică fiind cunoscută în întreaga lume.

III.14.2. Calculul propozițiilor

Deoarece obiectul logicii este studiul formelor corecte de raționament, iar un raționament constă dintr-o înălțare de judecăți, în logică interesează modul în care se leagă între ele propozițiile și în primul rând, pornind de la unele propoziții (considerate ca „materie primă”) putem construi alte propoziții. Elementele de construcție se numesc „propoziții simple” (de exemplu : „Mă pasionează calculatoarele”, „Studiez informatica”).

Propozițiile formate din propoziții simple, cu ajutorul unor cuvinte de legătură, se numesc propoziții compuse (de pildă: „Mă pasionează calculatoarele și studiez informatica”, „Dacă mă pasionează calculatoarele, atunci studiez informatica”; cuvintele de legătură fiind „și”, „Dacă... atunci...”). Cu aceleași propoziții simple se pot forma propoziții compuse diferite.

Partea logicii matematice care studiază legăturile dintre propoziții, fără a ține seama de structura internă a propozițiilor simple, se numește logica propozițiilor sau calcul propozițional.

Urmăcind tratarea logicii cu mijloace matematice, vom reprezenta simbolic propozițiile prin formule care seamănă cu structura cu cele algebrice.

Vom nota propozițiile (simple sau compuse) cu litere mari ale alfabetului latin. De exemplu, notăm propozițiile simple : „Citesc o carte interesantă” cu P , „La T.V. este un film în premieră” cu Q , „Stau acasă” cu litera R , iar propoziția compusă : „Dacă citesc o carte interesantă sau la T.V. este un film în premieră, atunci stau acasă” cu A . Observăm că, de fapt, formula A este „Dacă P sau Q atunci R ”. Adevărul sau falsitatea unei propoziții se numește valoarea sa logică (sau valoarea de adevăr) și se notează cu \mathcal{A} , respectiv \mathcal{F} .

Întrucît aceeași propoziție simplă poate fi, după împrejurări, adevărată sau nu, în logica matematică se face abstracție de sensul său. Cu alte cuvinte, vom presupune că nu știm care este valoarea sa de adevăr ci doar că aceasta poate fi ori \mathcal{A} ori \mathcal{F} .

La lecțiile de algebră s-au prezentat principalele operații logice, de aceea le vom considera cunoscute, ele fiind recapitulate în tabelul III.3*. Cu ajutorul acestor operații se pot construi propoziții compuse din propoziții simple.

* În tabel figurează pe lângă cele cinci operații logice elementare și disjuncția exclusivă, datorită frecvenței aplicații în care apare (circuite logice, programare).

P	$\neg P$
c	f
f	c

Negația unei propoziții P este adevărată dacă propoziția P este falsă și este falsă dacă propoziția P este adevărată.

P	Q	$P \wedge Q$
c	c	c
c	f	f
f	c	f
f	f	f

Conjuncția propozițiilor P și Q este adevărată doar dacă ambele propoziții P și Q sunt adevărate și este falsă cînd cel puțin una din propozițiile P și Q este falsă.

P	Q	$P \vee Q$
c	c	c
c	f	c
f	c	c
f	f	f

Disjuncția propozițiilor P și Q este adevărată dacă cel puțin una din propozițiile P și Q este adevărată și este falsă numai cînd ambele propoziții sînt false.

P	Q	$P \nabla Q$
c	c	f
c	f	c
f	c	c
f	f	f

Disjuncția exclusivă a propozițiilor P și Q este adevărată numai dacă una din propozițiile P și Q este adevărată și este falsă cînd propozițiile au aceeași valoare logică.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
c	c	c
c	f	f
f	c	c
f	f	c

Implicația propoziției Q prin propoziția P este falsă numai atunci cînd P este adevărată și Q este falsă, în toate celelalte cazuri ea este adevărată.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
c	c	c
c	f	f
f	c	f
f	f	c

Ecivalența propozițiilor P și Q este adevărată atunci cînd P și Q au aceeași valoare logică și este falsă cînd P și Q au valori logice diferite.

La rândul lor propozițiile compuse se pot lega între ele cu propoziții simple și se obțin noi propoziții.

În evaluarea unei propoziții compuse ordinea de efectuare a operațiilor este : \neg , \wedge , \vee , \forall , \Rightarrow , \Leftrightarrow . Pentru a indica altă ordine de efectuare a operațiilor se folosesc paranteze.

Astfel, formula : $P \wedge \neg P \vee Q$ este diferită de $P \wedge [(P \vee Q)]$ Sau, de exemplu, formula :

$$P \Rightarrow Q \vee \underbrace{\underbrace{\neg P}_{1} \wedge R}_{2}}_{3}$$

este diferită de formula :

$$\underbrace{(P \Rightarrow Q)}_{3} \vee \underbrace{\underbrace{\neg P}_{1} \wedge R}_{2}$$

Cu ajutorul tabelelor de adevăr putem determina valorile logice ale oricărei formule compuse, ținând seama de toate combinațiile posibile de valori logice ale componentelor.

Fie formula : $A = P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q$.

Aceasta are drept componente pe P și Q , legate prin conectorii \wedge , \vee , \neg . Ordinea de efectuare a operațiilor arată că întâi se face negația lui Q , apoi conjuncțiile $P \wedge Q$ și $P \wedge \neg Q$, iar la urmă disjuncția acestor două formule.

Pentru scrierea tabelului completăm întâi coloanele P și Q (corespunzătoare formulelor simple din care este compusă formula A), cu toate combinațiile posibile de valori logice. Fiecare formulă simplă avînd numai două valori logice posibile și n fiind numărul formulelor simple, care intervin în (a-) formulă compusă, tabelul va avea 2^n linii, deoarece cu n elemente care pot lua două valori diferite, se pot forma 2^n combinații de valori distincte. Rezultă că tabelul de adevăr al formulei A va avea $2^2 = 4$ linii.

Se completează pe rînd cîte o linie. Fiecare coloană corespunde unei propoziții, obținute printr-una din cele cinci operații logice, din propoziții ale căror valori logice figurează în coloane precedente. Valoarea logică a propoziției se determină conform tabelului de adevăr al operației în cauză.

Evaluarea corectă a formulelor cu mai multe operații logice este deosebit de importantă pentru tehnica de calcul. Vom da numai cîteva exemple.

	P	Q	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	$P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q$
1	\mathcal{A}	\mathcal{A}	\mathcal{F}	\mathcal{A}	\mathcal{F}	\mathcal{A}
2	\mathcal{A}	\mathcal{F}	\mathcal{A}	\mathcal{F}	\mathcal{A}	\mathcal{A}
3	\mathcal{F}	\mathcal{A}	\mathcal{F}	\mathcal{F}	\mathcal{F}	\mathcal{F}
4	\mathcal{F}	\mathcal{F}	\mathcal{A}	\mathcal{F}	\mathcal{F}	\mathcal{F}

La calculul liniei 2, de exemplu, s-a procedat astfel:

$$\begin{array}{c}
 P \wedge Q \vee \quad P \wedge \neg Q \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} \vee \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \\
 \mathcal{F} \vee \mathcal{A} \\
 \hline
 \mathcal{A}
 \end{array}$$

Există circuite logice, fundamentale în realizarea echipamentelor de calcul, care realizează funcția logică de negație a disjuncției (cercuite „NOR”) și funcția logică de negație a conjuncției (cercuite „NAND”). Acestea, la rândul lor, intră în componența multor circuite mult mai complexe, cu ajutorul cărora se implementează funcțiile echipamentului.

Sau, printre instrucțiunile mașină ale minicalculatoarelor românești se numără două instrucțiuni logice BIC și BIS care evaluează formulele logice $P \leftarrow P \wedge \neg Q$, respectiv $P \leftarrow P \vee Q$, unde P și Q reprezintă biți dintr-o zonă de memorie (valoarea 1 îi corespunde valoarea logică \mathcal{A} și valoarea 0 — valoarea logică \mathcal{F}). De exemplu, cu BIC se pot compara două configurații binare de 16 biți (cuvinte de memorie) și poziționa pe 0 biți cu valoarea 1 din prima configurație, cărora le corespund biți 1 în cea de-a doua:

<i>înainte</i>	<i>după execuția instrucțiunii BIC, A, B</i>
A : 1111111111111111	1101001100010010
B : 0010110011101101	0010110011101101

De asemenea, în descrierea rezolvării unei probleme, poate să fie necesar să se exprime condiții compuse, care de fapt reprezintă formule logice cu mai multe operații logice.

III.14.2.1. Diagrame Euler-Venn

În cazul formulelor cu cel mult trei propoziții simple componente este ușor să se obțină o reprezentare geometrică pentru valoarea de adevăr a formulei respective.

Să considerăm un dreptunghi, iar în interiorul lui să delimităm o anumită zonă printr-o curbă închisă. Domeniul închis de curbă va reprezenta,

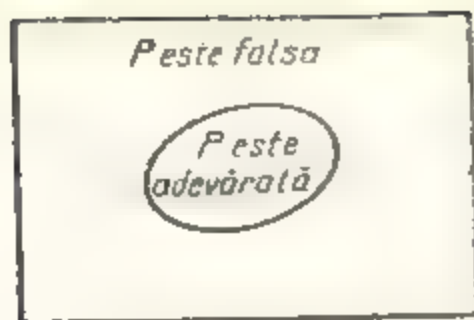


Fig. III.1

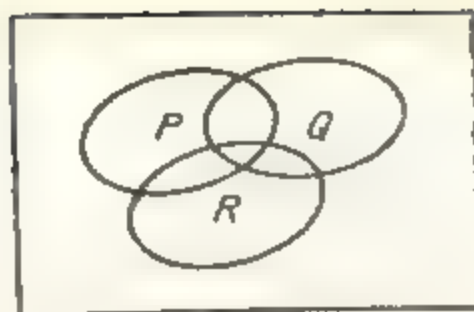


Fig. III.2

pentru o propoziție oarecare P , valoarea \mathcal{A} , iar zona exterioară domeniului — valoarea \mathcal{F} (fig. III.1).

În cazul propozițiilor compuse, fiecare componentă va fi reprezentată printr-un domeniu. Pentru a reprezenta toate combinațiile posibile de valori logice, domeniile se aleg astfel încât să se intersecteze în toate modurile posibile (fig. III.2).

Asfel de reprezentări ale operatorilor logici se numesc diagrame Euler-Venn¹.

Pentru a descrie o anumită operație logică, figurăm propozițiile componente și hăsurăm porțiunea în care propoziția compusă rezultată are valoarea \mathcal{A} ; porțiunea nehasurată va reprezenta valoarea \mathcal{F} a propoziției (conjunția este ilustrată de figurile III.3, a și III.3, b)

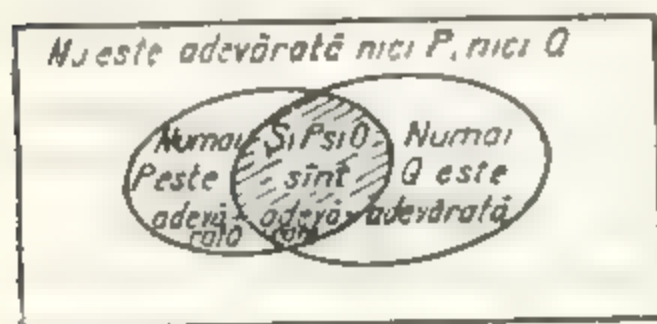


Fig. III.3, a

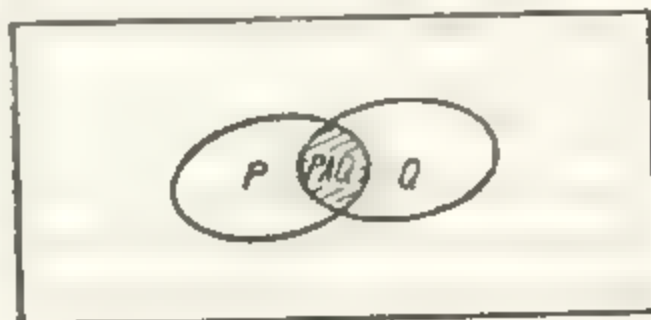


Fig. III.3, b

III.11 2.2. Tautologii și contradicții

Se știe, de la algebră, că o formulă care are valoarea logică \mathcal{A} , indiferent de valoarea logică a componentelor, se numește *tautologie*, sau *formulă identic adevărată*, sau încă *formulă validă*. Analog, formulele care au întotdeauna valoarea logică \mathcal{F} se numesc *contradicții*, sau *formule identic false*, sau *formule nerealizabile*.

¹ După numele matematicienilor L. Euler (1707—1783) și J. Venn care au introdus astfel de reprezentări pentru mulțimi și propoziții.

Tabelul III.5

1. 1 $P \wedge Q \Rightarrow P$
1. 2 $P \Rightarrow P \vee Q$.
- T. 3. $P \Rightarrow P$.
- T. 4. $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow [Q \Rightarrow] P$;
- T. 5. $P \wedge (Q \Leftrightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$; } (comutativitatea pentru \wedge și \vee);
- T. 6. $P \vee (Q \Leftrightarrow R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge R$; }
- T. 7. $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$; }
- T. 8. $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$; }
- T. 9. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$; }
- T. 10. $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$; } (distributivitatea \vee și \wedge);
- T. 11. $P \wedge P \Leftrightarrow P$.
- T. 12. $P \vee P \Leftrightarrow P$; (idempotența);
- T. 13. $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$.
- T. 14. $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$; (absorbția);
- T. 15. $[] P \Leftrightarrow P$.
- T. 16. $P \vee [] P$; (principiul terțului exclus);
- T. 17. $[] (P \wedge [] P)$; (principiul necontradicției);
- T. 18. $[] (P \wedge Q) \Leftrightarrow [] P \vee [] Q$.
- T. 19. $[] (P \vee Q) \Leftrightarrow [] P \wedge [] Q$; } (legile lui De Morgan);
- T. 20. $[] (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge [] Q$, T. 20' $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow [] P \vee Q$;
- T. 21. $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R)$ (tranzitivitatea implicației);
- T. 22. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

Consultînd tabelul se observă că o mare parte din tautologiile prezentate pun în evidență proprietăți ale operațiilor logice (asociativitatea conjuncției și disjuncției etc.).

Tautologiile sînt deosebit de importante, pe de o parte în formularea unor scheme de raționament corecte, iar pe de altă parte prin faptul că permit exprimarea unei operații logice prin alte operații logice. Acest ultim fapt prezintă un interes special pentru tehnica de calcul. Astfel, dacă un limbaj de programare nu dispune de operatori pentru toate operațiile logice, condițiile din algoritmi în care apar operațiile logice respective pot fi transcrise în limbaj de programare folosind proprietăți de tipul celor exprimate de tautologiile T.20 și T.22. Astfel, de exemplu, în FORTRAN, o condiție de tipul $A \Rightarrow B$ cu A și B variabile logice, se va codifica prin .NOT.A.OR.B (.AND., .NOT., .OR. fiind operatori FORTRAN pentru \wedge , $[]$ și \vee), acest limbaj neavînd un operator logic corespunzător implicației. Pe de altă parte, o situație similară poate apărea și la realizarea circuitelor logice (prin combinații de cilenite „NOR” și „NAND” se pot realiza circuite logice care să descrie orice formulă logică).

Observația 1. Să considerăm formula $[] (P \wedge Q) \Leftrightarrow [] P \vee [] Q$, dacă în $[] (P \wedge Q)$ și în $[] P \vee [] Q$ schimbăm pe \wedge cu \vee și pe \vee cu \wedge se vede că obținem cea de a doua lege a lui De Morgan (T.19). Acest lucru nu este întâmplător, ci exprimă o proprietate a conjuncției și disjuncției numită dualitate. Prin duala unei formule se înțelege formula obținută prin schimbarea conectorilor \wedge și \vee cu \vee , respectiv \wedge . Duala unei formule are același tabel de adevăr cu negația formulei în care s-a substituit P cu $[] P$ și invers.

Astfel, fie de exemplu formula:

$$P \wedge \neg P.$$

Duala sa este: $P \vee \neg P$.

Plecând de la formula inițială obținem

a) negația $\neg(P \wedge \neg P)$

b) substituția P cu $\neg P$ și $\neg P$ cu P ne dă $\neg(\neg P \wedge P)$.

ceea ce revine la $\neg(\neg P) \vee \neg P$, adică $P \vee \neg P$. Astfel, dacă A și B sunt formule cunoscute construite din formule simple sau negațiile formulilor simple, numai cu ajutorul operațiilor \wedge și \vee și, dacă A' și B' sunt formule obținute din A și B prin schimbarea lui \wedge cu \vee și a lui \vee cu \wedge , atunci:

- 1) dacă $\neg A$ este tautologie și A' este tautologie;
- 2) dacă A este tautologie și $\neg A'$ este tautologie;
- 3) dacă $A \Leftrightarrow B$ este tautologie și $A' \Leftrightarrow B'$ este tautologie;
- 4) dacă $A \Rightarrow B$ este tautologie și $B' \Rightarrow A'$ este tautologie.

Observația 2. În cazul în care o tautologie se exprimă printr-o echivalență (ca de pildă T.19 $\neg(P \vee \neg P) \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg P)$) se spune că formulele legate prin semnul „ \Leftrightarrow ” sunt logic echivalente (au aceeași valoare logică). Într-o formulă compusă, o anumită componentă poate fi înlocuită printr-o formulă logic echivalentă, fără ca valoarea logice a formulei compuse să se modifice. Astfel,

$$P \wedge Q \vee \neg(\neg R \wedge \neg S) \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \vee S \text{ în virtutea lui T.19 și T.15.}$$

Observația 3. Pentru a constata că o formulă este identic adevărată nu este totdeauna necesar să construim tabelul de adevăr (sau diagrama Euler-Venn) pentru toate propozițiile simple componente (acest lucru devenind și foarte complicat pentru formule cu multe componente). Dacă în tabelul de adevăr al unei formule obținem numai valori „1” (considerând propozițiile componente, în notărilor simple, putem fi siguri că formula este o tautologie).

Fie, de exemplu, formula (1) $P \wedge Q \Rightarrow P \wedge Q$, care este de forma (2) $A \Rightarrow A$ cu A propoziția compusă $P \wedge Q$.

Din tabelul de adevăr pentru $A \Rightarrow A$ (tabelul III.6) unde pentru propoziția compusă A am considerat cele două valori logice posibile, se vede că $A \Rightarrow A$ este o tautologie, deci și $P \wedge Q \Rightarrow P \wedge Q$ este o tautologie (acest lucru se poate verifica și pe tabelul III.7, unde am enumerat întâi valorile

Tabelul III.6

A	$A \Rightarrow A$
$\text{c}l$	$\text{c}l$
$\bar{c}l$	$\text{c}l$

Tabelul III.7

P	Q	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \Rightarrow P \wedge Q$
$\text{c}l$	$\text{c}l$	$\text{c}l$	$\text{c}l$
$\text{c}l$	$\bar{c}l$	$\bar{c}l$	$\text{c}l$
$\bar{c}l$	$\text{c}l$	$\bar{c}l$	$\text{c}l$
$\bar{c}l$	$\bar{c}l$	$\bar{c}l$	$\text{c}l$

pentru $P \wedge Q$, adică A și plecând de la acestea valorile implicației $P \wedge Q \Rightarrow P \wedge Q$.

Să observăm acum că tabelul de adevăr pentru $A \Rightarrow A$ și cel pentru $P \Rightarrow P$ (tabelul III.8) cu P propoziție simplă diferă numai prin notații. Astfel

pentru a arăta că $A \Rightarrow A$ este tautologie este suficient să arătăm că $P \Rightarrow P$ este tautologie și apoi să înlocuim pe P cu A în $P \Rightarrow P$.

Tabelul III.8

P	$P \Rightarrow P$
\mathcal{A}	\mathcal{A}
\mathcal{F}	\mathcal{A}

Tabelul III.9

P	Q	$\neg Q$	$P \vee \neg Q$
\mathcal{A}	\mathcal{A}	\mathcal{F}	\mathcal{A}
\mathcal{A}	\mathcal{F}	\mathcal{A}	\mathcal{A}
\mathcal{F}	\mathcal{A}	\mathcal{F}	\mathcal{F}
\mathcal{F}	\mathcal{F}	\mathcal{A}	\mathcal{A}

Raționând ca în exemplul precedent se poate demonstra următorul rezultat :

Teorema 1 (teorema substituției) Fie A o propoziție compusă din propoziții simple P_1, P_2, \dots, P_n și B o propoziție compusă obținută prin înlocuirea în A a propozițiilor simple P_1, \dots, P_n cu propozițiile compuse Q_1, \dots, Q_n . Dacă A este tautologie atunci și B este tautologie.

Această teoremă este importantă deoarece permite :

- să afirmăm că lista de tautologii 1.1 - 1.22 este valabilă pentru P și R formule oarecare ;
- să extindem lista de tautologii.

Trebuie să observăm că reciproca teoremei nu este adevărată ; dacă A nu este tautologie, B poate sau nu să fie o tautologie. Astfel, dacă A este formula $P \vee Q$ (știm că disjuncția nu este o tautologie) și înlocuim pe Q cu $\neg P$ obținem $B = P \vee \neg P$ care este o tautologie (principiul terțiului exclus). Înlocuind însă pe Q cu $\neg Q$ obținem $B = P \vee \neg Q$, care nu mai este tautologie (vezi tabelul III.9).

Există și alte rezultate importante care ne permit să stabilim că anumite formule sînt tautologii.

Fie următoarea :

Teorema 2. Dacă A este tautologie și dacă $A \Rightarrow B$ este tautologie atunci și B este tautologie.

A demonstra această teoremă revine la a determina în condițiile date valorile logice ale lui B (tabelul III.10).

Tabelul III.10

A	B	$A \Rightarrow B$
\mathcal{A}	$?$	\mathcal{A}
\mathcal{A}	$?$	\mathcal{A}
\mathcal{A}	$?$	\mathcal{A}
\mathcal{A}	$?$	\mathcal{A}

Tabelul III.11

P	Q	$P \Rightarrow Q$
\mathcal{A}	\mathcal{A}	\mathcal{A}
\mathcal{A}	\mathcal{F}	\mathcal{F}
\mathcal{F}	\mathcal{A}	\mathcal{A}
\mathcal{F}	\mathcal{F}	\mathcal{A}

Din tabelul de adevăr al implicației (tabelul III.11) se vede că $P \supset Q$ are valoarea $\text{c}\mathcal{A}$ pentru $P = \text{c}\mathcal{A}$ numai dacă și Q este $\text{c}\mathcal{A}$. Substituind pe \mathcal{A} lui P și pe B lui Q , ajungem la concluzia că B este tautologie.

Să utilizăm această teoremă și teorema substituției pentru a arăta că $P \vee \neg(P \vee Q)$ este o tautologie, fără a construi tabelul de adevăr.

Într-adevăr să înlocuim în $P \supset P \vee Q$ (T.2) pe P cu $P \vee \neg P$; obținem $P \vee \neg P \supset P \vee \neg(P \vee Q)$. Aceasta este o tautologie, conform teoremei substituției. Pe de altă parte, deoarece $P \vee \neg P$ este o tautologie, din teorema 2 rezultă că și $P \vee \neg(P \vee Q)$ este o tautologie c.e.t.d.

III.14.2.3. Raționament

Pentru rezolvarea unei probleme, formulăm mai multe propoziții care exprimă judecăți legate între ele.

Să urmărim următoarele propoziții:

„Dacă plouă, Andrei își ia umbrela“.

„Plouă“.

„Așadar, Andrei își ia umbrela“.

Observăm că ultima propoziție apare ca o urmare a celorlalte două; prima propoziție ne spune ce face Andrei dacă plouă; a doua propoziție precizează: „Plouă“; acum știm ce face Andrei și anume „își ia umbrela“.

O înșănțune de judecăți (propoziții) în care plecând numai de la anumite cunoștințe — consemnate într-un număr de propoziții numite premise — se ajunge la o cunoștință nouă — exprimată printr-o propoziție numită concluzie — se numește *raționament*.

Astfel, înșănțuirea de judecăți din exemplul precedent este un raționament, având drept premise: „Dacă plouă, Andrei își ia umbrela“ și „Plouă“, iar drept concluzie „Așadar Andrei își ia umbrela“.

Un raționament este corect dacă și numai dacă concluzia derivă din premise.

Raționamentul din exemplul anterior este corect, la fel și raționamentul:

Premise: „ $x + y = 10$ “

„ $x = 3$ “

Concluzie: „ $y = 7$ “.

Nu trebuie confundată corectitudinea unui raționament cu adevărul concluziei. Astfel, raționamentul:

Premise: „Toți copacii sînt păsări“

„Toate păsările pot înota“

Concluzie: „Toți copacii pot înota“

este corect, dar concluzia este falsă, decurgînd din premise false.

Raționamentul :

Premise : „Toate păsările cîntă” ;

„Toate rîndunelele cîntă”.

Concluzie : „Toate rîndunelele sînt păsări”.

este incorect, deși concluzia este adevărată. Raționamentul este incorect deoarece concluzia nu derivă din premise.

Să considerăm acum ca premise ale unui raționament propoziționale :

„Dacă măsura $\angle A =$ măsura $\angle B$, triunghiul ABC este isoscel”

„Dreptele D_1 și D_2 sînt paralele”.

Din aceste două propoziții nu putem desprinde nici o concluzie, deci nu orice propoziții considerate drept premise ne conduc la o concluzie.

Așadar logica, avînd menirea să descopere și să formuleze legile gîndirii corecte, adică formele corecte de raționament, trebuie să răspundă la următoarea întrebare :

Avînd o mulțime de propoziții adevărate, considerate drept premise cum putem ajunge la concluzii și care sînt acestea ?

III.14.2.4. Tipuri de raționamente

Pe baza proprietăților operațiilor logice se pot construi raționamente corecte. Acestea constituie „modele” de raționament valabile în orice teorie în care despre o anumită propoziție putem spune că este fie adevărată, fie falsă dar nu ambele, adică în orice domeniu în care este valabil principiul bivalenței.

Deja cum s-a mai precizat în cele ce urmează, se va vedea că diferitele tipuri de raționamente valabile se bazează pe tautologii.

III.14.2.4.1. Raționament prin *modus ponens*

Cel mai simplu tip de raționament și, în același timp, elementul pe care se fundamentează toate tipurile de raționamente este următorul : „dacă P și în același timp $P \Rightarrow Q$, atunci Q ”. Observăm că acest mod de gîndire ne este firesc, deoarece sîntem obișnuiți cu el atît din matematică, cît și din viața de toate zilele. De asemenea, să ne amintim că pentru a demonstra teorema 2 am arătat că dacă P este adevărată și $P \Rightarrow Q$ este adevărată, atunci Q este adevărată.

Un astfel de raționament se numește *modus ponens*, deci, dacă P și $P \Rightarrow Q$ sînt propoziții adevărate atunci și Q este adevărată.

P și $P \Rightarrow Q$ sînt premisele raționamentului, iar Q concluzia. Acest lucru se scrie :

$$\begin{array}{c} P \\ P \Rightarrow Q \\ \hline Q. \end{array}$$

Astfel, de exemplu, considerind adevărate propozițiile :

„Dacă mă scol devreme, nu întârzii la școală”

și

„Mă scol devreme”

în modus ponens rezulta ca este adevărată și propoziția :

„Nu întârzii la școală”.

Sau, considerind adevărate propozițiile :

„ $x = 2y$ ” și „ $x = 2y \rightarrow x$ este divizibil cu 2”, atunci este adevărată și propoziția „ x este divizibil cu 2”.

Vom da la continuare exemple și de alte tipuri de raționamente :

III.14.2.1.2. Raționament prin contraposiție (modus tollens)

Dacă propozițiile $P \rightarrow Q$ și $\neg Q$ sînt adevărate, atunci este adevărată și propoziția $\neg P$; adică :

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \neg Q \\ \hline \neg P \end{array}$$

Într-adevăr, conform T 20', $P \rightarrow Q$ este logic echivalentă cu $\neg P \vee Q$, deci rezultă că dacă $P \rightarrow Q$ este adevărată atunci și $\neg P \vee Q$ este adevărată ; $\neg Q$ fiind adevărată, Q este falsă. Deci pentru ca disjuncția $\neg P \vee Q$ să fie adevărată trebuie ca $\neg P$ să fie adevărată (rezultă din tabelul de adevăr al disjuncției).

Pre. de exemplu, $P \rightarrow Q$ teorema de geometrie :

„Dacă un triunghi ABC este isoscel, atunci triunghiul ABC are două unghiuri congruente”. Atunci $\neg Q$ este propoziția : „Triunghiul ABC nu are două unghiuri congruente” pe care o considerăm adevărată. Putem afirma imediat ca $\neg P$ este adevărată, adică : „triunghiul ABC nu este isoscel”.

III.14.2.1.3. Raționament prin reducere la absurd

Fie A o formulă despre care vrem să arătăm că este adevărată. Pentru aceasta vom presupune că $\neg A$ este falsă, deci că de fapt este adevărată formula $\neg \neg A$.

Pornind de la această presupunere deducem o anumită propoziție $\neg B$, care este în contradicție cu un adevăr B cunoscut (B este întotdeauna adevărată în teoria considerată), ceea ce este absurd. Rezultă că $\neg A$ este falsă, deci A este adevărată.

Formalizat, acest tip de raționament se scrie :

$$\begin{array}{l} \neg A \rightarrow B \\ \neg A \rightarrow \neg B \\ \hline A \end{array}$$

și poartă numele de raționament prin reducere la absurd.

Acesta este un raționament corect. Într-adevăr, B fiind adevărată și $\neg A \Rightarrow B$ este adevărată. Dar și $\neg A \Rightarrow \neg B$ este adevărată. Aceste două implicații sînt însă simultan adevărate numai atunci cînd $\neg A$ este falsă, după cum rezultă din tabelele de adevăr corespunzătoare (tabelele III.12 și III.13), adică numai atunci cînd A este adevărată.

Tabelul III.12

A	$\neg A$	B	$\neg A \Rightarrow B$
\mathcal{A}	\mathcal{F}	\mathcal{A}	\mathcal{A}
\mathcal{A}	\mathcal{F}	\mathcal{F}	\mathcal{A}
\mathcal{F}	\mathcal{A}	\mathcal{A}	\mathcal{A}
\mathcal{F}	\mathcal{A}	\mathcal{F}	\mathcal{F}

Tabelul III.13

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$\neg A \Rightarrow \neg B$
\mathcal{A}	\mathcal{F}	\mathcal{A}	\mathcal{F}	\mathcal{A}
\mathcal{A}	\mathcal{F}	\mathcal{F}	\mathcal{A}	\mathcal{A}
\mathcal{F}	\mathcal{A}	\mathcal{A}	\mathcal{F}	\mathcal{F}
\mathcal{F}	\mathcal{A}	\mathcal{F}	\mathcal{A}	\mathcal{A}

Observăm că la același rezultat se putea ajunge folosind raționamentul prin modus tollens.

Într-adevăr, $\neg A \Rightarrow \neg B$ este adevărată și B este adevărată. Dar $B \Leftrightarrow \neg \neg B$ (conform T.15). Luînd drept P pe $\neg A$ și drept Q pe $\neg B$, rezultă imediat prin modus tollens $\neg A$ adevărată, deci A adevărată.

Raționamentul prin reducere la absurd este foarte des întâlnit în geometrie.

Exemplu :

Să demonstrăm prin reducere la absurd următoarea teoremă din geometria euclidiană plană.

A : „Două drepte distincte D_1 și D_2 paralele cu a treia D_3 , sînt paralele între ele” sau

$$A : \neg D_1 \parallel D_2 \wedge D_3 \parallel D_1 \wedge D_3 \parallel D_2 \Rightarrow D_1 \parallel D_2.$$

Deci A este de forma $P \wedge Q \Rightarrow R$.

Dar $P \wedge Q \Rightarrow R \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee R$ și deci

$\neg(P \wedge Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow \neg(\neg(P \wedge Q) \vee R)$ și aplicînd una din legile lui De Morgan obținem :

$$\neg A \Leftrightarrow \neg \neg(P \wedge Q) \wedge \neg R \text{ adică}$$

$$P \wedge Q \wedge \neg R \text{ sau } D_1 \parallel D_2 \wedge D_3 \parallel D_1 \wedge D_3 \parallel D_2 \wedge \neg D_1 \parallel D_2.$$

Rezultă că dacă $\neg A$ este adevărată, atunci și $D_1 \nparallel D_2$ este adevărată. Dar dacă $D_1 \nparallel D_2$, atunci, ele se intersectează într-un punct O . Dar $D_1 \parallel D_3$ și $D_2 \parallel D_3$ sînt adevărate, deci punctul O nu aparține lui D_3 și deci printr-un punct exterior unei drepte D_3 trec două drepte paralele cu aceasta.

Dar axioma paralelelor afirmă B : „Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la dreapta dată”. Am ajuns astfel la o contradicție : din $\neg A$ am dedus $\neg B$, iar B este adevărată. Asadar, presupunerea $\neg A$ este falsă ; prin urmare A este demonstrată.

O altă schemă posibilă pentru raționamentul prin reducere la absurd este următoarea :

$$\frac{B}{\neg A \Rightarrow \neg B} \quad A.$$

Dacă B este adevărată și $\neg A \Rightarrow \neg B$ este adevărată, din tabelul de adevăr al implicației, rezultă că $\neg A$ este falsă (deoarece $\neg B$ este falsă), deci A este adevărată.

III.14.2.1.4. Raționament prin adjuncțiune

Dacă propozițiile P și Q sînt adevărate, atunci este adevărată și conjuncția lor $P \wedge Q$:

$$\frac{P \quad Q}{P \wedge Q}.$$

Faptul că acest raționament este corect, rezultă imediat din definiția conjuncției.

Fie, de exemplu, P : „Triunghiul ABC este dreptunghic” și Q : „Triunghiul ABC este isoscel”, ambele adevărate. Rezultă $P \wedge Q$ adevărată: „Triunghiul ABC este dreptunghic și isoscel”.

III.14.2.1.5. Raționament folosind tranzitivitatea implicației

Dacă propozițiile $P \Rightarrow Q$ și $Q \Rightarrow R$ sînt adevărate atunci și propoziția $P \Rightarrow R$ este adevărată, adică:

$$\frac{P \Rightarrow Q \quad Q \Rightarrow R}{P \Rightarrow R}.$$

Acest tip de raționament este corect, conform T 21 $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow P \Rightarrow R)$ este adevărată conform raționamentului prin adjuncțiune).

Fie $P \Rightarrow Q$ propoziția: „Dacă $\alpha \subset \beta$ atunci $\alpha \cap \beta = \alpha$ ” și $Q \Rightarrow R$: „Dacă $\alpha \cap \beta = \alpha$, atunci $C\beta \subset C\alpha$ ”, ambele adevărate în teoria mulțimilor*.

Rezultă că este adevărată propoziția $P \Rightarrow R$, adică: „Dacă $\alpha \subset \beta$, atunci $C\beta \subset C\alpha$ ”.

III.14.2.1.6. Trecerea de la echivalență la implicație

Dacă propoziția $P \Leftrightarrow Q$ este adevărată, atunci sînt adevărate și propozițiile $P \Rightarrow Q$ și $Q \Rightarrow P$:

$$\frac{P \Leftrightarrow Q}{P \Rightarrow Q} \quad \text{și} \quad \frac{P \Leftrightarrow Q}{Q \Rightarrow P}.$$

Se știe că $P \Leftrightarrow Q$ este adevărată numai dacă P și Q au aceleași valori logice; dar dacă P și Q au aceleași valori logice, din definiția implicației rezultă că și $P \Rightarrow Q$ și $Q \Rightarrow P$ sînt adevărate.

Fie $P \Leftrightarrow Q$ propoziția „ $\alpha \subset \beta$ dacă și numai dacă orice element din α este și element al lui β ”. Atunci sînt adevărate și afirmațiile „dacă $\alpha \subset \beta$ atunci orice element din α este și element al lui β ” și „dacă orice element din α este și element al lui β atunci $\alpha \subset \beta$ ”.

* Notăm mulțimile cu litere mici ale alfabetului grec ($\alpha, \beta, \dots, \omega, \dots$).

III 14 2 4.7. Trecerea de la două implicații reciproce la echivalență

Dacă propozițiile $P \Rightarrow Q$ și $Q \Rightarrow P$ sînt adevărate atunci și $P \Leftrightarrow Q$ este adevărată :

$$\begin{array}{c} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow P \\ \hline P \Leftrightarrow Q. \end{array}$$

Raționamentul este corect conform 1.22 ($(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ este adevărată conform raționamentului prin adjuncțiune).

De exemplu, fie propozițiile adevărate din teoria mulțimilor :

$P \Rightarrow Q$: „ $\alpha \cup \beta = \alpha \Rightarrow \beta \subset \alpha$ ” și $Q \Rightarrow P$: „ $\beta \subset \alpha \Rightarrow \alpha \cup \beta = \alpha$ ”, rezultă adevărată propoziția $P \Leftrightarrow Q$: „ $\alpha \cup \beta = \alpha \Leftrightarrow \beta \subset \alpha$ ”.

În exemplele anterioare am utilizat diverse tipuri de raționamente în efectuarea unor demonstrații simple. Pentru demonstrarea unor teoreme mai dificile se recurge la înălțurarea mai multor raționamente de același tip sau diferite. Avantajul utilizării diferitelor scheme de raționament constă în scurțarea demonstrației, înlocuind mai multe afirmații printr-o concluzie îndreptățită de raționamentul considerat.

INTREBĂRI ȘI EXERCIIU

1. Ce este logica ?

2. Care din următoarele formulări sînt propoziții în sensul celor exprimate la pagina 75 ?

- Toți oamenii sînt muncitori.
- Ionescu este elev în clasa a X-a.
- Cînd pisica nu-i acasă, joacă șoarecii pe masă.
- Această navă este rapidă.
- Ce vînt te aduce ?
- Pătratul este romb.
- Triunghiul are patru laturi ?
- $5 > 3$.
- Dacă nu vin, înseamnă că nu întîrziți.

3. Care din următoarele propoziții sînt simple și care sînt compuse ; indicați propozițiile componente.

- Astăzi nu merg la teatru.
- Dacă ABC este un triunghi dreptunghic, atunci pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor.
- Ninge.
- Nu știu să înot, deci mă pot îneca.
- Știu logică, dar nu pot să demonstrez această teoremă.

4. Să se scrie simbolice propozițiile compuse de la exercițiul 3. Să se construiască tabelul de adevăr pentru propoziția e.

5. Să se construiască tabelele de adevăr și diagramele Euler-Venn ale următoarelor formule :

a) $\neg(P \wedge Q) \Rightarrow (P \rightarrow Q)$.

b) $\neg(P \Leftrightarrow Q) \wedge P$.

c) $(P \Rightarrow \neg Q) \wedge P \Rightarrow Q$.

6. Să se verifice ca următoarele formule (pagina 80) sînt identic adevărate :

a) T.4, T.11, T.12 — cu ajutorul tabelelor de adevăr ;

b) T.13, T.14 — cu ajutorul diagramelor Euler-Venn.

7. Să se arate că relația „este logic echivalent” este o relație de echivalență în mulțimea propozițiilor.

8. Să se arate că dacă $P \Leftrightarrow Q$ atunci și $\neg P \Leftrightarrow \neg Q$ și $P \wedge R \Leftrightarrow Q \wedge R$ și $P \vee R \Leftrightarrow Q \vee R$.

9. Să se exprime disjuncția prin negație și conjuncție.

10. Să se exprime conjuncția prin negație și disjuncție.

11. Să se exprime implicația prin negație și conjuncție.

12. Să se exprime conjuncția prin negație și implicație.

13. Să se exprime disjuncția prin negație și implicație.

14. Să se arate, fără a folosi tabele de adevăr, că următoarele formule sînt tautologii :

a) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$;

b) $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$;

c) $\neg\neg(\neg A \vee \neg B) \Leftrightarrow \neg(\neg\neg A \wedge \neg\neg B)$.

15. Să se arate că oricare ar fi formula A , ea este echivalentă logic cu o formulă R în care negația „ \neg ” nu se aplică decît propozițiilor simple.

16. Să se scrie simbolice următorul raționament :

Dacă m și n sînt numere pare, atunci $m^2 \cdot n^2$ este par.

Dar $2a$ și $2b$ sînt pare.

Deci $4a^2 + 4b^2$ este par.

17. Să se demonstreze prin reducere la absurd teorema „Dacă $a \cdot b = 0$ atunci $a = 0$ sau $b = 0$ ”.

18. Să se scrie simbolice următorul enunț :

„Se știe că dacă una din cele trei persoane care discută spune ceva adevărat, atunci toate celelalte afirmații ale sale vor fi adevărate, iar dacă spune ceva fals, tot ce va spune este fals. Prima persoană face o afirmație, pe care nu o știm. Apoi cea de a doua declară : „A spus că a spus adevărul” și „De fapt, a spus adevărul”. Cea de a treia persoană spune : „Nu, cel care a vorbit primul a mințit”.

Se poate deduce care persoane au spus adevărul ?

19. Dați exemple de raționamente purtătoare de la echivalență la implicație, folosite în rezolvarea problemelor de geometrie.

20. Să se arate că următoarele formule sînt tautologii:

a) $(P \vee Q) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)).$

b) $P \Leftrightarrow (P \vee (Q \wedge \neg Q)).$

c) $P \Leftrightarrow (P \vee (P \wedge Q)).$

d) $((P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)).$

Să se scrie dualele formulelor b) și c).

III.14.3. Calculul predicatelor

III.14.3.1 Calculul predicatelor ca dezvoltare a calculului propozițiilor

Pentru început, să ne amintim câteva elemente de teoria mulțimilor. Se știe că putem reprezenta o mulțime în două feluri. Un prim procedeu constă în enumerarea elementelor din care este alcătuită mulțimea: se poate vorbi de „mulțimea elevilor: Ionescu Ion, Georgescu Dan, Popescu Dinu”, sau de „mulțimea numerelor: $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ”. Acest lucru se scrie de obicei punînd elementele între acolade:

$$A = \{\text{Ionescu Ion, Georgescu Dan, Popescu Dinu}\};$$

$$B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Procedeul devine incomod dacă numărul elementelor este foarte mare și este de neutilizat, în cazul mulțimilor infinite.

Există și un alt mod de a defini o mulțime și anume prin specificarea unei proprietăți pe care o au toate elementele din mulțimea considerată; astfel se poate vorbi de „mulțimea tuturor premianților din clasa a IX-a” sau de „mulțimea tuturor numerelor întregi x care verifică inegalitățile $-5 \leq x \leq 5$ ” (este chiar mulțimea B precizată anterior); sau de „mulțimea cărților dintr-o bibliotecă”. În acest mod, și numai așa, se pot defini și mulțimi cu un număr infinit de elemente, de pildă: „mulțimea numerelor întregi”, sau „mulțimea numerelor întregi pare”, sau „mulțimea cercurilor cu aria 4”.

Observăm că acest procedeu stabilește o legătură între mulțimi și proprietăți din logica matematică: se precizează o anumită mulțime de obiecte (mulțimea elevilor dintr-o anumită clasă sau mulțimea numerelor întregi, de exemplu) și apoi se enunță o propoziție care este adevărată pentru toate elementele mulțimii considerate și numai pentru acestea de exemplu, „este un elev foarte bun” sau „are aptitudini sportive” etc. Mulțimea x a tuturor elementelor din mulțimea totală τ (τ poate fi, de exemplu, mulțimea elevilor sau mulțimea numerelor) care au proprietatea enunțată printr-o propoziție A se numește mulțimea de adevăr a propoziției A .

Fie de exemplu τ mulțimea numerelor întregi, iar α mulțimea numerelor întregi pare. Acest lucru se poate scrie :

$$\alpha = \{x \mid x \text{ este număr par}\}.$$

Sau dacă β este mulțimea numerelor întregi cuprinse în intervalul închis $[-5, 5]$:

$$\beta = \{x, -5 \leq x \leq 5\}.$$

Sau dacă γ este mulțimea perechilor ordonate de numere întregi nenegative a căror sumă este 25, deducem :

$$\gamma = \{(x, y) \mid x + y = 25, x \geq 0, y \geq 0, x, y \text{ întregi}\}.$$

Referitor la propozițiile „ x este număr par”, „ $-5 \leq x \leq 5$ ”, „ $x + y = 25$ ”, se impun două observații :

a) subiectul propoziției (despre cine se afirmă că are o anumită proprietate) nu este specificat (x sau r și y) ; se precizează numai proprietatea. Proprietatea nu se modifică, indiferent de elementul cu care se înlocuiește x sau y ;

b) subiectul nefiind precizat, nu putem atribui valoarea de adevăr sau fals unei astfel de propoziții, propoziția devine însă adevărată sau falsă în momentul precizării subiectului.

De pildă, pentru $x = 2$, propoziția „ x este număr par” este adevărată, dar este falsă pentru $x = 3$; „ $x + y = 25$ ” este adevărată pentru $x = 7$ și $y = 18$ și este falsă pentru $x = 1$ și $y = 2$.

Se știe, de la algebra, că astfel de propoziții se numesc *predicată**

Un predicat este o afirmație relativă la una sau mai multe variabile care are proprietatea că pentru valori specificate ale variabilelor este fie adevărată, fie falsă.

Astfel, predicatul pot fi unare, binare, ternare etc., după cum depind de una, două sau mai multe variabile.

Vom nota un predicat cu $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ etc. sau $P(x, y, \dots)$ iar prin $P(a)$, $P(3)$, $P(1, 2, \dots)$ propoziția obținută prin specificarea valorilor variabilelor.

Un predicat este definit în momentul în care se precizează mulțimea elementelor în care variabilele iau valori (mulțimea totală τ , sau mulțimea de referință).

Mulțimea de adevăr a unui predicat este mulțimea elementelor care au proprietatea P .

* Spre deosebire de sensul atribuit pe fondul unei gramatici în limbaj, el exprimă o anumită proprietate a subiectului, va cuprinde o lungă predicatul gramatical, și complementul, atributul etc.

Altfel spus, oricărui mulțimi de elemente τ și oricărui predicat $P(x)$ le corespunde o mulțime \mathcal{D} ale cărei elemente sînt exact elementele din τ pentru care $P(x)$ este adevărat. \mathcal{D} este mulțimea de adevăr a predicatului.

Afirmația anterioară constituie o axiomă din teoria mulțimilor și anume axioma specificației.

Axioma specificației determină pe \mathcal{D} în mod unic. Se obișnuiește să se scrie :

$$\mathcal{D} = \{x \mid x \in \tau \wedge P(x)\}$$

sau cînd mulțimea de referință τ este evidentă :

$$\mathcal{D} = \{x \mid P(x)\}.$$

Exemple :

Fie τ mulțimea numerelor întregi :

1) Predicatul „ $-5 \leq x \leq 5$ ” este unar și are mulțimea de adevăr $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

2) Predicatul „ $x^2 - 4 = 0$ ”, este unar — denotat cu τ — $\{-2, 2\}$.

3) Predicatul „ $4x^2 + 5x + 1 = 0$ ” este unar, mulțimea de adevăr fiind $\{-1\}$ (a doua rădăcină $-1/4$ nu este număr întreg, deci nu aparține mulțimii de referință).

4) Predicatul „ $x^2 + 1 = 0$ ” este predicat unar, mulțimea sa de adevăr fiind mulțimea vidă \emptyset .

5) Fie acum τ mulțimea perechilor ordonate de numere întregi consecutive : predicatul „ $x + y = 4$ ” este binar — mulțimea de adevăr a predicatului este $\{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0), (0, 4)\}$.

6) Predicatul „ $x = y + z$ ” este ternar : mulțimea de adevăr nu se poate preciza pînă cîntărește, fiind infinită (de exemplu, elemente cu două cifre sînt $(1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 0, 2), (2, 2, 0), (2, 1, 1)$ etc.), dacă considerăm $\tau = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

7) Fie τ mulțimea totală din teoria mulțimilor. Predicatul „ $\alpha \subset \beta$ ” reprezintă relația de incluziune.

8) Fie τ mulțimea membrilor unei familii (fig. III.4). Predicatul „ x este frate cu y ” este binar și are ca mulțime de adevăr, $\{(Iu, Idu), (Idu, Iu), (Vdu, Vdu), (Ddu, Ddu), (Ddu, Vdu), (Vdu, Ddu)\}$.

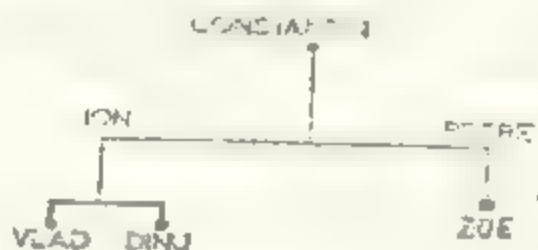


Fig. III.4

9) Fie $\tau = \tau_1 \times \tau_2$, unde τ_1 este mulțimea elevilor din clasa a IX-a și τ_2 este mulțimea elevilor din clasa a X-a de la o anumită școală. Putem considera predicatul „ x are media mai mare la matematică decât y ”, unde $x \in \tau_1$ și $y \in \tau_2$.

Predicatul multiple (binare, ternare etc.) se numesc și relații (binare, ternare etc.).

Astfel, de exemplu, în loc să spunem că x și y au proprietatea „ $x \leq y$ ”, spunem „ x este în relația \leq cu y ”. Sau în loc de „ y are proprietatea „ x este frate cu y ”, spunem „ x este în relația „este frate cu y ”.

Atât predicatul unare cât și relațiile au o deosebită importanță în matematică și își găsesc multiple aplicații în cele mai diverse domenii (informatică, lingvistică, biologie etc.).

Partea logicii matematice care studiază proprietățile predicatelor precum și operațiile și raționamentele care se pot face cu ele se numește logica predicatelor sau calculul predicatelor. Logica predicatelor apare ca o extensie a logicii propozițiilor, pătrunzând cu analiza în structura internă a propozițiilor simple, adică ținând seama de alcătuirea lor din subiect și predicat.

III.1.3.2. Particularizarea unui predicat. Cuantificări

Din exemplele date în paragraful anterior se vede că un predicat este o funcție definită pe mulțimea de referință τ , al cărui codomeniu îl reprezintă valorile de adevăr ale propozițiilor rezultate prin specificarea valorilor variabilelor (fig. III.5).

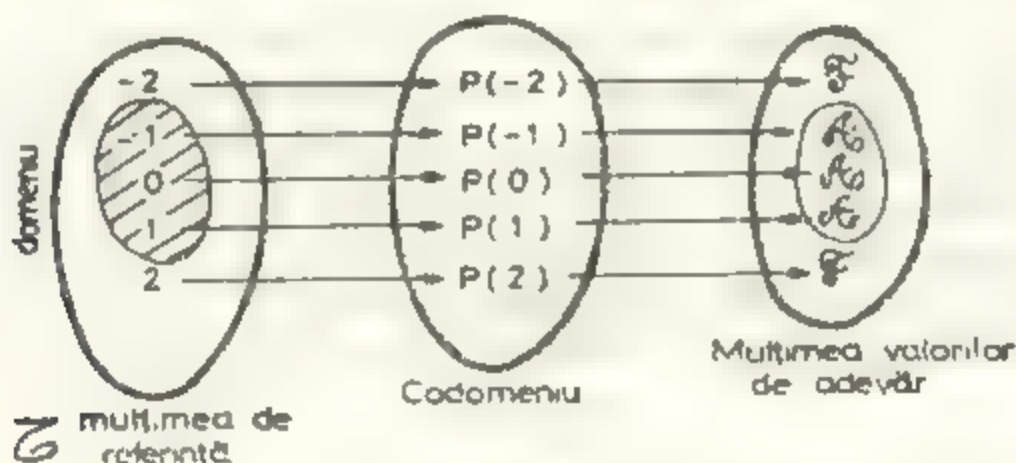


Fig. III.5

De exemplu, dacă mulțimea de referință este $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ și $P(x)$ este „ $-1 \leq x < 2$ ”, codomeniul este format din propozițiile $P(x)$: „ $-1 \leq -2 < 2$ ”, $P(-1)$: „ $-1 \leq -1 < 2$ ”, $P(0)$: „ $-1 \leq 0 < 2$ ”, $P(1)$: „ $-1 \leq 1 < 2$ ”, $P(2)$: „ $-1 \leq 2 < 2$ ”. Dintre acestea $P(-1)$, $P(0)$ și $P(1)$ sînt adevărate, iar $P(2)$ și $P(-2)$ sînt false.

Deer unui predicat i se pot asocia mai multe propoziții, fiecare avînd o anumită valoare de adevăr.

În cazul exemplului precedent acest lucru se poate urmări și pe tabelul de adevăr III.14.

Construirea tabelelor de adevăr este însă dificil de realizat pentru mulțimi de referință cu multe elemente și imposibilă pentru mulțimi infinite.

Există două metode de construire a propozițiilor asociate unui predicat $P(x)$.

Tabelul III.14

x	$P(x)$
-2	F
-1	A
0	A
1	A
2	F

Prima metoda, care de altfel a și fost utilizată, se numește particula-
rizarea predicatului și constă în a atribui variabilelor predicatului valori
efective din mulțimea de referință. Astfel unui predicat $P(x)$ îi asociem pro-
pozițiile $P(x_1)$, $P(x_2)$, ... care înseamnă „ x_1 are proprietatea P “, „ x_2 are
proprietatea P “, iar unui predicat multiplu, de exemplu, $P(x, y)$ îi asociem
propozițiile $P(x_1, y_1)$ („ x_1 este în relația P cu y_1 “), $P(x_2, y_2)$ („ x_2 este în re-
lația P cu y_2 “) etc. Semnificația propozițiilor particulare astfel obținute de-
pinde de elementele reprezentate de x_1 , x_2 , y_1 , y_2 . Aceste elemente se numesc
variabile libere.

O altă metodă asociază predicatelor un tip special de propoziții, numite
cuantificări ale predicatului, care spre deosebire de propozițiile particulare,
presupun participarea parțială sau totală a elementelor din mulțimea de
referință.

Există două tipuri de cuantificări:

1) Cuantificarea universală

Fie α și β două mulțimi. Intersecția lor $\alpha \cap \beta$ este mulțimea $\gamma = \{x \mid x \in \alpha$
și $x \in \beta\}$. Altfel spus, γ este intersecția mulțimilor α și β dacă și numai
dacă toți x din γ sînt și în α și în β , sau, - formulare echivalentă - oricare
ar fi x din γ , x este element al mulțimii α și element al mulțimii β .

În acest exemplu, am asociat predicatului $P(x)$: „ $x \in \alpha$ și $x \in \beta$ “ o
propoziție, „oricare ar fi x , are proprietatea $P(x)$ “ (sau toți x au proprietatea
 $P(x)$). O astfel de asociere se numește cuantificare universală, iar propo-
ziția care rezultă se numește propoziție universală și se notează simbolic
prin :

$$(\forall x)P(x).$$

Simbolul „ \forall “ se numește *cuantor universal* sau *cuantificator universal*.

Deoarece semnificația propoziției universale nu depinde explicit de x ,
variabila x se numește, în acest caz, variabilă legată. Propoziția $(\forall x)P(x)$
este adevărată dacă și numai dacă toate elementele x din mulțimea de refe-
rință τ au proprietatea P și este falsă dacă pentru cel puțin un element x
din τ proprietatea nu este adevărată.

În cazul unui predicat multiplu, de exemplu $P(x, y, \dots)$ propoziția uni-
versală asociată este :

$$(\forall x)(\forall y) \dots P(x, y, \dots)$$

x, y, \dots fiind variabilele legate.

2) Cuantificare existențială

Să considerăm din nou două mulțimi α și β și să presupunem că $\alpha \not\subseteq \beta$.
Ce înseamnă acest lucru ? Înseamnă că există cel puțin un element x astfel
încît dacă $x \in \alpha$ atunci $x \notin \beta$.

Predicatului „dacă $x \in \alpha$ atunci $a \in \beta$ ” îi putem asocia propoziția „există cel puțin un x cu proprietatea dacă $x \in \alpha$ atunci $x \in \beta$ ”. O asemenea asociere se numește cuantificare existențială, iar propoziția rezultată se numește propoziție existențială și se notează :

$$(\exists x)P(x)$$

unde „ \exists ” reprezintă cuantificatorul existențial.

Și în acest caz x este variabilă legată

Propoziția existențială este adevărată dacă și numai dacă există cel puțin un element din mulțimea de referință a predicatului pentru care proprietatea este adevărată și este falsă dacă nici un element din mulțimea de referință nu are proprietatea P .

Pentru predicate multiple $P(x, y, \dots)$ existențiala asociată are forma :

$$(\exists x)(\exists y)\dots P(x, y, \dots)$$

În concluzie, unei anumite proprietăți $P(x)$ îi putem asocia trei tipuri de propoziții :

1. Propoziții particulare $P(x_1), P(x_2), \dots$
2. O propoziție universală $(\forall x)P(x)$ (oricare ar fi x , avem $P(x)$).
3. O propoziție existențială $(\exists x)P(x)$ (există cel puțin un x pentru care avem $P(x)$).

În cazul unui predicat multiple, pe lângă cele trei tipuri menționate anterior se pot asocia și alte tipuri de propoziții, obținute din corabii ale acestora. În continuare dăm tipurile de propoziții asociate unui predicat binar (relație binară) $P(x, y)$:

1. Propoziții particulare : $P(x_1, y_1), P(x_2, y_2), \dots$
2. Propoziții particulare universalizate, obținute prin aplicarea cuantorului universal uneia dintre variabile și prin particularizarea celeilalte variabile : $(\forall x)P(x, y_1), (\forall x)P(x, y_2), \dots$, care se citesc : „oricare ar fi x , avem $P(x, y_1)$ ”, „oricare ar fi x , avem $P(x, y_2)$ ”, x este variabilă legată, iar y_1, y_2, \dots sînt variabile libere. Sau, $(\forall y)P(x_1, y), (\forall y)P(x_2, y), \dots$ cînd y este variabilă legată și x_1, x_2, \dots sînt variabile libere.

3. Propoziții particulare existențiale, obținute analog, prin aplicarea cuantorului existențial : $(\exists x)P(x, y_1), (\exists x)P(x, y_2), \dots$ cu x variabilă legată și y_1, y_2, \dots variabile libere și $(\exists y)P(x_1, y), (\exists y)P(x_2, y), \dots$ cu y variabilă legată și x_1, x_2, \dots , variabile libere.

4. O propoziție universală $(\forall x)(\forall y)P(x, y)$ „oricare ar fi x și oricare ar fi y , avem $P(x, y)$ ”. Observăm că semnificația propoziției nu se schimbă, dacă schimbăm ordinea în care apar variabilele cu cei doi cuantori.

$(\forall y)(\forall x)P(x, y)$ este propoziția „oricare ar fi y și oricare ar fi x , avem $P(x, y)$ ”.

5. O propoziție existențială : (1) $(\exists y)P(x, y)$: „există cel puțin un y și există cel puțin un x pentru care avem $P(x, y)$ ”. Semnificația acestei propoziții este aceeași cu a propoziției $(\exists y)(\exists x)P(x, y)$.

6. Două propoziții existențiale universalizate: $(\forall x) (\exists y) P(x, y)$ care se citește „oricare ar fi x , există cel puțin un y , astfel încât să avem $P(x, y)$ ” și $(\forall y) (\exists x) P(x, y)$, care se citește „oricare ar fi y , există cel puțin un x , astfel încât să avem $P(x, y)$ ”.

7. Două propoziții universale existențializate: $(\exists x) (\forall y) P(x, y)$, adică „există cel puțin un x , astfel încât oricare ar fi y , avem $P(x, y)$ ” și $(\exists y) (\forall x) P(x, y)$, adică „există cel puțin un y , astfel încât oricare ar fi x , avem $P(x, y)$ ”.

Este important să observăm că în cazul ultimelor categorii de propoziții (existențiale universalizate și universale existențializate) ordinea în care apar cuantorii este esențială.

Vom ilustra acest lucru printr-un exemplu. Fie τ mulțimea perechilor ordonate de numere reale și $P(x, y)$ predicatul „ $x < y$ ”. Propoziția $(\forall x) (\exists y) P(x, y)$ adică „oricare ar fi x , există cel puțin un y , astfel încât $x < y$ ” este adevărată (pentru orice număr real, fie acesta x_1 , putem determina un număr real y_1 , astfel încât $x_1 < y_1$; de exemplu, $y_1 = x_1 + 1$). În schimb propoziția $(\exists y) (\forall x) P(x, y)$, adică „există cel puțin un y , astfel încât oricare ar fi x , $x < y$ ” este falsă (nu există un număr real care să fie mai mare decât toate numerele reale).

Exemplu:

Fie τ mulțimea numerelor naturale $\{5, 6, 7, 8\}$ și $P(x)$ predicatul: „ $x < 7$ ”.

Propozițiile asociate predicatului sînt:

● propoziții particulare:

$P(5)$: „ $5 < 7$ ” cu valoarea de adevăr \mathcal{A} ;

$P(6)$: „ $6 < 7$ ” cu valoarea de adevăr \mathcal{A} ;

$P(7)$: „ $7 < 7$ ” cu valoarea de adevăr \mathcal{F} ;

$P(8)$: „ $8 < 7$ ” cu valoarea de adevăr \mathcal{F} ;

● propoziția universală:

$(\forall x) P(x)$: „oricare ar fi x , avem $x < 7$ ”

care este falsă (particularele $P(7)$ și $P(8)$ avînd valoarea \mathcal{F})

● propoziția existențială:

$(\exists x) P(x)$: „există cel puțin un x , pentru care $x < 7$ ”, care este adevărată.

III.14 3.3. Operații cu predicate

Am văzut că o mulțime poate fi reprezentată ca mulțimea de adevăr a unui predicat. Fie acum două mulțimi α și β , determinate ca mulțimi de adevăr ale predicatelor $P(x)$ și $Q(x)$; τ este mulțimea totală din întreaga mulțime:

$$\alpha = \{x \mid P(x)\} \text{ și } \beta = \{x \mid Q(x)\}.$$

Complementul mulțimii α este mulțimea $C\alpha$ formată din elemente din mulțimea totală, care nu aparțin lui α , adică pentru care proprietatea P este falsă:

$$C\alpha = \{x \mid \text{non } P(x)\}.$$

Intersecția mulțimilor α și β este mulțimea ale cărei elemente au și proprietatea P și proprietatea Q :

$$\alpha \cap \beta = \{x \mid P(x) \text{ și } Q(x)\}.$$

Reuniunea mulțimilor α și β este mulțimea elementelor pentru care cel puțin una din proprietăți P sau Q este adevărată:

$$\alpha \cup \beta = \{x \mid P(x) \text{ sau } Q(x)\}.$$

Diferența dintre mulțimea α și mulțimea β este mulțimea formată din elementele din α care nu sînt elemente ale lui β , adică:

$$\alpha - \beta = \{x \mid P(x) \text{ și non } Q(x)\}.$$

Mulțimea α este inclusă în β dacă orice element din α are proprietatea Q : $\alpha \subset \beta$ dacă și numai dacă „oricare ar fi x , dacă $P(x)$ atunci $Q(x)$ ”.

Mulțimea α este egală cu mulțimea β dacă orice element din α aparține lui β și dacă orice element din β aparține lui α : $\alpha = \beta$ dacă și numai dacă „oricare ar fi x , $P(x)$ dacă și numai dacă $Q(x)$ ”.

Observăm că pentru a determina mulțimile $C\alpha$, $\alpha \cap \beta$, $\alpha \cup \beta$, $\alpha - \beta$ am efectuat diferite operații logice cu predicate. Astfel, $C\alpha$ este mulțimea de adevăr a predicatului obținut prin negarea lui $P(x)$: $\neg P(x)$, $\alpha \cap \beta$ este mulțimea de adevăr a predicatului obținut prin conjuncția predicatelor care determină mulțimile α și β : $P(x) \wedge Q(x)$, $\alpha \cup \beta$ este determinată de $P(x) \vee Q(x)$ iar $\alpha - \beta$ de $P(x) \wedge \neg Q(x)$.

Relațiile de incluziune și egalitate între două mulțimi s-au definit cu ajutorul propozițiilor universale asociate implicației predicatelor $P(x)$ și $Q(x)$ $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$, respectiv echivalenței predicatelor $(\forall x)(P(x) \Leftrightarrow Q(x))$.

Fie două predicate $P(x)$ și $Q(x)$, cu mulțimea de referință τ și mulțimile de adevăr \mathcal{D}_1 , respectiv \mathcal{D}_2 .

Negația predicatului $P(x)$, $\neg P(x)$ are mulțimea de adevăr $\tau - \mathcal{D}_1$ (mulțimea elementelor care nu au proprietatea P). Conjuncția predicatelor $P(x)$ și $Q(x)$, $P(x) \wedge Q(x)$ are mulțimea de adevăr $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$, iar disjuncția $P(x) \vee Q(x)$ are mulțimea de adevăr $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$.

Implicația lui $Q(x)$ prin $P(x)$: „ $P(x) \Rightarrow Q(x)$ ” are mulțimea de adevăr $C\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, iar echivalența predicatelor $P(x)$ și $Q(x)$ are mulțimea de adevăr $(C\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) \cap (C\mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_1)$. Se spune că predicatele $P(x)$ și $Q(x)$ sînt echivalente dacă mulțimile lor de adevăr coincid ($\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$).

Cele afirmate anterior se pot urmări pe figurile III.6, unde zona hașurată reprezintă mulțimile de adevăr pentru diferitele predicate obținute din $P(x)$ și $Q(x)$ prin aplicarea operațiilor logice. Deci, așa cum în calculul propozițiilor construim formule logice cu propoziții simple sau compuse, la fel în calculul predicatelor vom putea construi formule cu predicate.

Cele cinci operații logice se pot efectua și cu propozițiile asociate predicatelor.

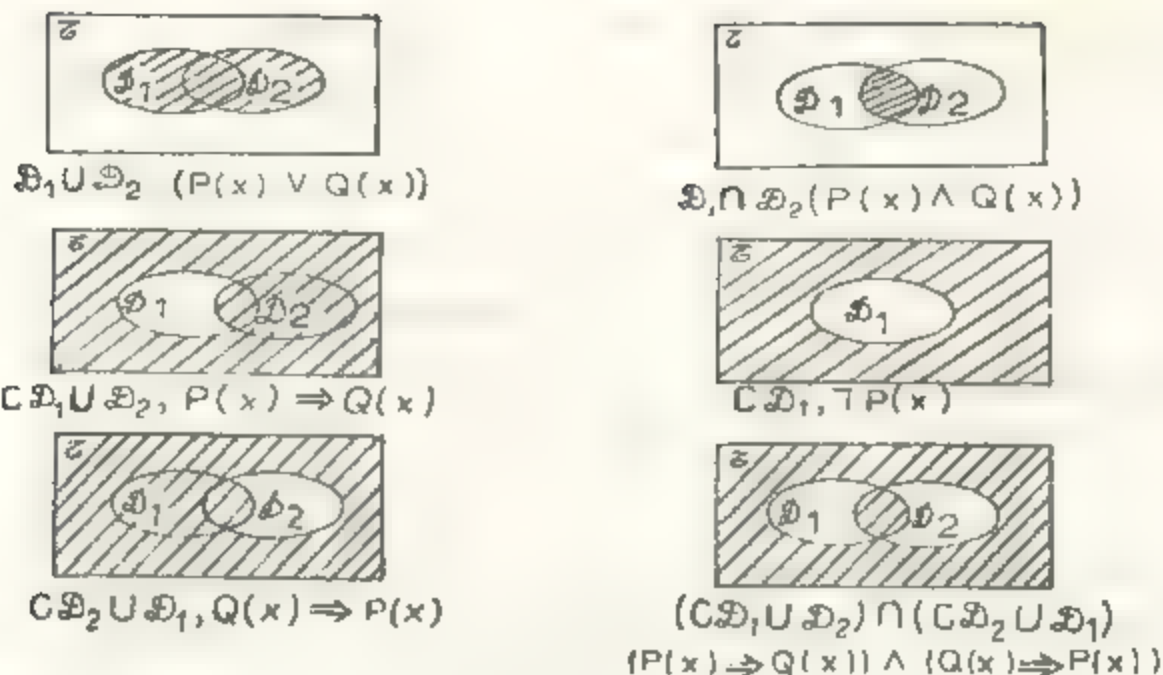


Fig. III.6

Fie predicatele $P(x)$ și $Q(x)$. Fiecărei operații logice îi putem asocia diferite propoziții :

a) *Propoziții particulare*, de exemplu :

$\neg P(x_1); \neg Q(x_1);$
 $P(x_1) \Rightarrow P(x_2); Q(x_1) \Rightarrow Q(x_2);$
 $P(x_1) \Leftrightarrow P(x_2); Q(x_1) \Leftrightarrow Q(x_2).$

b) *Propoziții universale* :

$(\forall x) \neg P(x);$
 $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x));$
 $(\forall x)(P(x) \Leftrightarrow Q(x)).$

c) *Propoziții existențiale* :

$(\exists x) \neg P(x);$
 $(\exists x)(P(x) \Rightarrow Q(x));$
 $(\exists x)(P(x) \Leftrightarrow Q(x)).$

Am utilizat ca operații logice numai \neg , \Rightarrow și \Leftrightarrow , deoarece știm din calculul cu propoziții că atât conjuncția, cât și disjuncția se pot exprima cu ajutorul conectorilor \neg și \Rightarrow (vezi exercițiile 12, 13 de la pagina 89).

III.14.3.4. Identități logice

În calculul propozițiilor am arătat importanța pe care o au tautologiile, adică formulele care sînt întotdeauna adevărate, indiferent de valoarea de adevăr a propozițiilor componente.

Se numește identitate logică o propoziție asociată unui predicat, care are întotdeauna valoarea A , indiferent de semnificația predicatului care a determinat-o.

Plecind de la o anumită tautologie putem construi două categorii de identități logice :

a. Înlocuind toate propozițiile P, Q, R, \dots care apar, sau numai pe unele dintre ele, cu predicate. Astfel de exemple de identități logice sînt :

$P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow P(x)$, din T.1 ;
 $P(x) \Rightarrow P(x)$, din T.3 ;
 $\neg \neg P(x) \Leftrightarrow P(x)$, din T.15 (negația negației) ;
 $P(x) \vee \neg P(x)$, din T.16 (principiul terțiului exclus) ;
 $\neg (P(x) \wedge \neg P(x))$ din T.17 (principiul necontradicției) ;
 $\neg (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \neg P(x) \vee \neg Q(x)$, din T.18 (De Morgan) ;
 $P(x) \wedge Q \Rightarrow P(x)$, din T.1 ;
 $(P(x) \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R(x)) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow R(x))$, din T.21

(tranzitivitatea implicației) ;

în ultimele două exemple Q fiind o propoziție și nu un predicat.

b. Construirea propozițiilor asociate identităților obținute prin procedeul enunțat anterior. De exemplu, din principiul identității $P \Rightarrow P$ putem obține identitățile logice :

$P(x_1) \Rightarrow P(x_1)$,
 $(\forall x)(P(x) \Rightarrow P(x))$, sau $P(x_1, y_1) \Leftrightarrow P(x_1, y_1)$;
 $(\exists x)(P(x) \Rightarrow P(x))$, $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \Rightarrow P(x, y))$;
 $(\exists x)(\exists y)(P(x, y) \Rightarrow P(x, y))$.

Din negația negației $\neg \neg P \Leftrightarrow P$ obținem :

$\neg \neg P(x_1) \Leftrightarrow P(x_1)$,
 $(\forall x)(\neg \neg P(x) \Leftrightarrow P(x))$, sau $\neg \neg P(x_1, y_1) \Leftrightarrow P(x_1, y_1)$;
 $(\exists x)(\neg \neg P(x) \Leftrightarrow P(x))$, $(\forall x)(\forall y)(\neg \neg P(x, y) \Leftrightarrow P(x, y))$;
 $(\exists x)(\exists y)(\neg \neg P(x, y) \Leftrightarrow P(x, y))$.

Plecind de la principiul terțiului exclus $P \vee \neg P$ avem :

$P(x_1) \vee \neg P(x_1)$,
 $(\forall x)(P(x) \vee \neg P(x))$, sau $P(x_1, y_1) \vee \neg P(x_1, y_1)$;
 $(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$, $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \vee \neg P(x, y))$;
 $(\exists x)(\exists y)(P(x, y) \vee \neg P(x, y))$.

Plecind de la definiția cuantorilor \forall și \exists putem obține și alte identități logice, care de fapt exprimă proprietăți ale acestora.

Din definiția cuantorului universal rezultă că dacă o propoziție universală este adevărată, atunci este adevărată și oricare dintre propozițiile particulare ale acesteia. Obținem astfel identitatea logică :

$$IL.1 (\forall x)P(x) \Rightarrow P(x_1)$$

sau, pentru un predicat binar :

$$(\forall x)(\forall y)P(x, y) \Rightarrow P(x_1, y_1).$$

● Analog, dacă o propoziție particulară este adevărată, atunci este adevărată și propoziția existențială, deci

$$IL.2 P(x_1) \Rightarrow (\exists x)P(x),$$

este o identitate logică.

În cazul unui predicat binar, IL.2 se scrie :

$$P(x_1, y_1) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)P(x, y).$$

● Dacă o propoziție universală este adevărată, este evident că și propoziția existențială este adevărată și avem identitatea logică :

$$\text{IL.3 } (\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)P(x)$$

sau

$$(\forall x)(\forall y)P(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)P(x, y).$$

● *Negarea propozițiilor cuantificate*

Pentru ca propoziția $(\forall x)P(x)$ să nu fie adevărată este suficient ca să existe o valoare particulară x_1 , pentru care $P(x_1)$ să fie falsă sau $\neg P(x_1)$ adevărată. Dar conform IL.2 :

$$\neg P(x_1) \Rightarrow (\exists x) \neg P(x).$$

Rezultă principiul negării unei propoziții universale :

$$\text{IL.4 } \neg ((\forall x)P(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x),$$

sau, în cazul unui predicat binar :

$$\neg ((\forall x)(\forall y)P(x, y)) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)\neg P(x, y).$$

La fel, pentru ca $(\exists x)P(x)$ să fie falsă trebuie ca oricare ar fi x , $P(x)$ să fie falsă.

Negația unei propoziții existențiale se exprimă prin identitatea logică

$$\text{IL.5 } \neg ((\exists x)P(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x)$$

sau, pentru predicate binare :

$$\neg ((\exists x)(\exists y)P(x, y)) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)\neg P(x, y).$$

Dar IL.3 și IL.4 ne conduc și la identitățile :

$$\text{IL.6 } (\forall x)\neg P(x) \Rightarrow \neg ((\forall x)P(x)) \text{ respectiv}$$

$$(\forall x)(\forall y)\neg P(x, y) \Rightarrow \neg ((\forall x)(\forall y)P(x, y)), \text{ iar IL.3 și IL.5 la}$$

$$\text{IL.7 } \neg ((\exists x)P(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x) \text{ respectiv}$$

$$\neg ((\exists x)(\exists y)P(x, y)) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)\neg P(x, y).$$

Identitățile logice stau la baza construcției schemelor de raționamente din calculul predicatelor, pe care de altfel le-am întâlnit frecvent în rezolvarea diferitelor probleme de geometrie sau algebră.

Astfel, ori de câte ori aplicăm, într-un caz particular, o teoremă, definiție sau axiomă, enunțată, pentru o clasă de obiecte, utilizăm IL.1, adică trecerea de la o propoziție universală la o propoziție particulară.

De exemplu, în geometria plană este adevărată propoziția: „oricare ar fi triunghiul ABC , dacă el este dreptunghic, atunci pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor”.

Să presupunem că trebuie rezolvată problema:

Se dă un dreptunghi cu lungimea de 25 m și lățimea de 16 m (fig. III.7). Să se determine diagonala dreptunghiului.

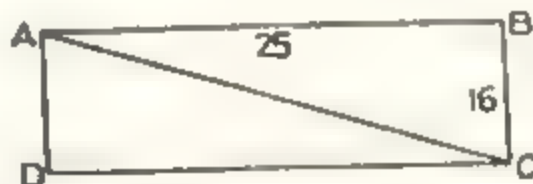


Fig. III.7

Din teorema lui Pitagora, prin IL.1 rezultă pentru ABC :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 25^2 + 16^2,$$

ceea ce ne permite să determinăm imediat diagonala dreptunghiului.

În continuare vom da un exemplu de rezolvare de probleme în care intervin calcule cu predicate.

O schemă de raționament specifică calculului cu predicate este *silogismul*. Silogismul are diferite forme, cea mai cunoscută fiind:

$$(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$$

$$\frac{P(x_1)}{Q(x_1)}$$

În ipoteza că propozițiile $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$ și $P(x_1)$ sînt adevărate, rezultă adevărată propoziția particulară $Q(x_1)$.

Într-adevăr, dacă $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$ este adevărată, rezultă că oricare din propozițiile particulare asociate predicatului $P(x) \Rightarrow Q(x)$ este adevărată. Deci și $P(x_1) \Rightarrow Q(x_1)$ este adevărată. Dar $P(x_1)$ este adevărată. Rezultă din definiția implicației și $Q(x_1)$ adevărată.

Un exemplu foarte cunoscut de raționament prin silogism este următorul:

$$\begin{array}{l} \text{Toți oamenii sînt muritori} \\ \text{Socrate este om} \\ \hline \text{Deci Socrate este muritor.} \end{array}$$

Exemplu:

În algebră se demonstrează teorema: „pentru orice funcție de gradul doi $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, dacă $a > 0$ atunci f este strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și strict crescătoare pe intervalul $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ ”.

Fie $P(f)$: „ $a > 0$ ” și $Q(f)$: „ f strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și strict crescătoare pe intervalul $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ ”.

În mulțimea funcțiilor de gradul doi este adevărată propoziția $(\forall f)(P(f) \Rightarrow Q(f))$.
 Ie. acum $f(x) = 2x^2 - x + 1$, deci $a = 2$.
 $P(2x^2 - x + 1)$ este „ $2 > 0$ ” și este adevărată.
 Prin silogism rezultă $Q(f)$ adevărată, adică $2x^2 - x + 1$, strict descrescătoare în intervalul $\left(-\infty, \frac{+1}{4}\right]$ și strict crescătoare în intervalul $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

Paradoxul mincinosului

Un paradox foarte vechi, cunoscut din antichitate, este paradoxul mincinosului.

Inițial avea forma unei întrebări P : „Minci cînd spui că minci?” adresată unui mincinos, adică unei persoane care nu spune niciodată adevărul. Mincinosul nu poate să răspundă decît „mînt” sau „nu mînt”.

Dacă răspunde „mînt”, el nespunînd niciodată adevărul, înseamnă că propoziția R : „mînt” este falsă, deci $\neg R$ este adevărată, adică „nu mînt” este adevărată, ceea ce contrazice ipoteza că el este un mincinos total.

Dacă răspunde „nu mînt”, analog se deduce că „mînt” este adevărată, și mincinosul total spune un adevăr, ceea ce din nou contravine ipotezei.

Deci propoziției „mînt” nu i se poate atribui nîci valoarea A , nici valoarea F , ea luînd imediat valoarea contrară.

O altă formă a acestui paradox se numește „paradoxul lui Epimenide” și se enunță astfel: „Epimenide cretanul spunea că toți cretanii sînt mincinoși”. Se ajungea aparent la aceeași contradicție încercînd să aflăm dacă ceea ce afirma Epimenide este adevărat sau nu.

Dacă „toți cretanii sînt mincinoși”, este adevărată, atunci Epimenide fiind cretan, el este mincinos și deci nu spune adevărul cînd afirmă că „toți cretanii sînt mincinoși”, de unde contradicția cu ipoteza.

Dacă „toți cretanii sînt mincinoși” este falsă, înseamnă că Epimenide minte cînd face această afirmație, adică este de fapt adevărată propoziția „există cel puțin un cretan care nu minte”. În această situație paradoxul dispare.

În gene al astfel de paradoxuri ascund o greșeală de logică. Astfel, să formalizăm paradoxul lui Epimenide. Fie $Q(x)$: „ x este mincinos”, atribuind cuvîntului mincinos sensul menționat anterior (un individ care nu spune niciodată adevărul), iar $P(x)$: „ x este cretan”.

Contradicția provenea din silogismul:

$$(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$$

$$P(\text{Epimenide})$$

$$Q(\text{Epimenide}).$$

Raționamentul este însă corect numai dacă premisele sînt adevărate, ceea ce nu putem afirma, deoarece nu știm dacă toți cretanii sînt mincinoși sau nu. Deci concluzia „Epimenide minte” nu poate fi afirmată.

Există însă multe alte variante ale acestui paradox. De exemplu :

a) Ce valoare de adevăr are : „Propoziția aceasta este falsă“ ?

b) Într-o insulă trăiau niște uriași foarte răi și șireți. Orice străin care acosta pe insulă era jertfit fie zeului adevărului, fie zeului minciunii, în funcție de valoarea de adevăr a răspunsului pe care îl da străinul la o anumită întrebare. Unul dintre străini, fiind întrebat „Care îți va fi moartea ? “ a răspuns „Voi fi jertfit zeului minciunii“, răspuns care a pus în mare înecătură pe uriași.

INTREBĂRI ȘI EXERCIIU

1. Ce se înțelege printr-un predicat ? Dați exemple de predicate unare și predicate binare.

2. Cite tipuri de propoziții se pot asocia unui predicat ? Exemplificați în cazul predicatelor :

a) $P(x, y) : „x \text{ divide pe } y“$, cu τ mulțimea numerelor naturale ;

b) $P(x) : „x^2 - 4x + 2 = 0“$, cu τ mulțimea numerelor reale ;

c) $P(x, y) : „(x \neq y) \wedge (x < y)“$, cu τ mulțimea numerelor raționale.

3. Fie predicatele $P(x) : „x \text{ are note mari la matematică}“$ și $Q(x) : „x \text{ are note mari la română}“$, τ fiind mulțimea elevilor dintr-o clasă

Să se scrie formalizat propozițiile :

a) Toți elevii au note mari la matematică, iar unii la română.

b) Unii elevi au note mici la română.

c) Fiecare elev are note mari la matematică și la română.

d) Nu toți elevii au note mici la matematică.

e) Există elevi care au note mari la matematică, dar mici la română.

f) Nici un elev nu are note mici la matematică și la română.

g) Dacă toți elevii au note mici la română, atunci câțiva au note mari la matematică.

h) Dacă nu toți elevii au note mici la matematică, atunci unii nu au note mici nici la română.

i) Anca are note mari la matematică și Andrei are note mici la română.

4. Să se scrie formalizat și apoi în cuvinte negațiile propozițiilor din exercițiul 3.

5. Care este valoarea logică a propozițiilor din exercițiul 3 dacă :

— propoziția a) este adevărată ;

— propoziția b) este adevărată ;

— propoziția c) este adevărată.

6. Fie $P(x)$ și $Q(x)$, două predicate cu aceeași mulțime de referință. Să se arate că următoarele propoziții sînt identități logice :

- $a_1.$ $(P(x_1) \Rightarrow S) \Rightarrow ((\forall x)P(x) \Rightarrow S)$;
- $a_2.$ $((\exists x)P(x) \Rightarrow S) \rightarrow (P(x_1) \Rightarrow S)$;
- $a_3.$ $(R \rightarrow (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (R \Rightarrow Q(x_1))$;
- $a_4.$ $(R \rightarrow Q(x_1)) \Rightarrow (R \Rightarrow (\exists x)Q(x))$;
- $a_5.$ $((\forall x)P(x) \Rightarrow S) \Rightarrow ((\exists x)P(x) \Rightarrow S)$;
- $a_6.$ $(R \Rightarrow (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (R \Rightarrow (\exists x)Q(x))$;
- $b_1.$ $(\forall x)(P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)Q(x))$;
- $b_2.$ $(\forall x)(P(x) \Leftrightarrow S) \Rightarrow ((\forall x)P(x) \Leftrightarrow S)$;
- $b_3.$ $(\forall x)(P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \rightarrow ((\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)Q(x))$;
- $b_4.$ $(\forall x)(P(x) \Leftrightarrow S) \Rightarrow ((\exists x)P(x) \Leftrightarrow S)$;
- $b_5.$ $S \Rightarrow (\forall x)(S \vee Q(x))$; $S \rightarrow (\exists x)(S \vee Q(x))$;
- $c_1.$ $((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$;
- $c_2.$ $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x))$;
- $c_3.$ $(S \vee (\forall x)Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(S \vee Q(x))$;
- $c_4.$ $(\exists x)(S \vee Q(x)) \Leftrightarrow S \vee (\exists x)Q(x)$;
- $c_5.$ $((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$;
- $c_6.$ $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow ((\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x))$;
- $c_7.$ $(S \vee (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(S \vee Q(x))$;
- $c_8.$ $(\forall x)(S \vee Q(x)) \Rightarrow (S \vee (\exists x)Q(x))$;
- $c_9.$ $(S \vee (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (S \vee Q(x_1))$;
- $c_{10}.$ $(S \vee Q(x_1)) \Rightarrow (S \vee (\exists x)Q(x))$;
- $c_{11}.$ $(S \vee (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (S \vee (\exists x)Q(x))$;
- $d_1.$ $(\forall x)(S \wedge Q(x)) \Rightarrow S$;
- $d_2.$ $(\exists x)(S \wedge Q(x)) \Rightarrow S$;
- $e_1.$ $((\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$;
- $e_2.$ $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow ((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x))$;
- $e_3.$ $(S \wedge (\forall x)Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(S \wedge Q(x))$;
- $e_4.$ $(S \wedge (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(S \wedge Q(x))$;
- $e_5.$ $(S \wedge (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (S \wedge (\exists x)Q(x))$;
- $e_6.$ $(S \wedge (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (S \wedge (Q(x_1)))$.

7. Definiți relația binară :

- a) simetrică ;
- b) reflexivă ;
- c) tranzitivă ;
- d) antisimetrică.

8. Să se arate că în mulțimea numerelor reale relațiile :

$$P(x, y) : „x = y”$$

$$R(x, y) : „|x - y| < 1”$$

sînt reflexive și simetrice, iar relațiile

$$S(x, y) : „x < y”,$$

$$T(x, y) : „x - y > 1”$$

sînt reflexive și antisimetrice.

De asemenea să se arate că relațiile P și S sînt tranzitive, iar T intranzitivă. R nu este nici tranzitivă, nici intranzitivă.

9. Dați exemple de relații de ordine parțială și de relații de echivalență.

10. Arătați că în mulțimea submulțimilor unei mulțimi γ „ $\alpha \subset \beta$ ” este o relație de ordine parțială.

Indicații și răspunsuri

Pagina 67

3. Oricare. 4. Se compară cifrele de același ordin. 1° $a = 9$, $b = 7$, $c \geq 1$ sau $a = 9$, $b > 7$; 2° $a < 9$ sau $a = 9$ și $b < 7$. 5—8. Se folosesc exemplele de la III.3.1 și III.3.2 9—14. Analog cu 4 15—23. Se folosesc exemplele de la III.4. 24—41. Se folosesc exemplele de la III.4.2 și III.4.3. 42—63. Se folosesc exemplele de la III.11, III.12 și III.13.

Pagina 88

2. a), b), c), d), f), h), i). 3. Propoziție simplă : c) ; propoziții compuse : a), b), d), e). 9. $P \vee Q \Leftrightarrow \neg (\neg P \wedge \neg Q)$. 10. $P \wedge Q \Leftrightarrow \neg (\neg P \vee \neg Q)$. 11. $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg (P \wedge \neg Q)$. 12. $P \wedge Q \Leftrightarrow \neg (P \Rightarrow \neg Q)$. 13. $P \vee Q \Leftrightarrow \neg P \Rightarrow Q$. 17. Indicație. Se consideră următoarele propoziții : P : „ $ab = 0$ ” ; Q : „ $a = 0$ ” ; $\neg Q$; R : „ $b = 0$ ” ; $\neg R$. Trebuie demonstrat $A : P \Rightarrow (Q \vee R)$; se presupune $\neg A$ și se arată că $\neg A \Rightarrow \neg B$, cu B : „produsul a două numere nenule este nenul”. 18. Nu se poate deduce care dintre persoane au spus adevărul.

Pagina 103

3. a) $(\forall x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$; b) $(\exists x)\neg Q(x)$; c) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$; d) $\neg (\forall x)\neg P(x)$; e) $(\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x))$; f) $\neg (\exists x)(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$; g) $(\forall x)\neg Q(x) \Rightarrow (\exists x)P(x)$; h) $\neg (\forall x)\neg P(x) \Rightarrow (\exists x)\neg \neg Q(x)$; i) $P(\text{Anca}) \wedge \neg Q(\text{Andrei})$. 4. a) $(\exists x)\neg P(x) \vee (\forall x)\neg Q(x)$; b) $(\forall x)Q(x)$; c) $(\exists x)(\neg P(x) \vee \neg Q(x))$; d) $(\forall x)\neg P(x)$; e) $(\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x))$; f) $(\exists x)(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$; g) $(\forall x)(\neg Q(x) \wedge \neg P(x))$; h) $(\exists x)P(x) \wedge (\forall x)\neg Q(x)$; i) $\neg P(\text{Anca}) \vee Q(\text{Andrei})$. 5. a) \mathcal{A} ; b) nedecis ; c) nedecis ; d) \mathcal{A} ; e) nedecis ; f) \mathcal{A} ; g) \mathcal{A} ; h) \mathcal{A} ; i) nedecis. Raționament analog pentru celelalte două situații.

Bibliografie

1. BEZICOVICI S. I., *Calculul aproximativ*, Editura Tehnică, București, 1952.
2. BOCȘA MINERVA, *Curs de analiză numerică*, Tip. Univ. Timișoara, 1971.
3. BRIȘCĂ V., IONESCU B., TUDOR GH., *Calcul numeric*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973.
4. CÂMPEANU F., *De la papirusul Rhind la calculatorul electronic*, Editura Ion Creangă, București, 1976.
5. DEMIDOVITCH B., MARON L., *Elemente de calcul numérique*, Editions MIR, Moscou, 1973.
6. DRĂGĂNESCU M., *Sistem și civilizație*, Editura Politică, București, 1976.
7. DUMITRIU A., *Soluția paradoxelor logico-matematice*, Editura Științifică, București, 1966.
8. GEORGESCU H., PREOTEASA P., *Introducere în sistemul de operare SIRIS*, Editura Albatros, București, 1978.
9. IONESCU S., BUCUR, *Asupra aproximării numerelor reale*, *Gazeta Matematică*, seria A, vol. LXXVI, nr. 12, București, 1971.
10. IONESCU H., *Calculul numeric*, Editura Tehnică, București, 1954.
11. KUNTZMANN J., *Méthodes numériques*, Ed. Hermann, Paris, 1969.
12. KRILOV N. A., *Leții de calcul prin aproximații*, Editura Tehnică, București, 1957.
13. LAVROV I. A., MAXIMOVA L. L., *Probleme de teoria mulțimilor și logică matematică*, Editura Tehnică, București, 1974.
14. LIVOVSCHI I., *Bazele Informaticii*, Editura Albatros, București, 1979.
15. MIHĂILESCU M., *Mijloace ajutătoare în calculul tehnic*, *Memorial matematic și tehnic*, Editura Tehnică, București, 1958.
16. MUNTEANU E., NEGRESCU L., PRODAN A., VUSCAN T., *Introducere în informatică*, Manual pentru cursurile postliceale și elevii liceelor pentru informatică, București, 1973.
17. MOISIL C. GR., *Elemente de logică matematică și teoria mulțimilor*, Editura Științifică, București, 1968.
18. NICULESCU ST., *Noțiuni de prelucrare automată a datelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975.
19. NOVICOV P. S., *Elemente de logică matematică*, Editura Științifică, București, 1966.
20. POPOVICI P. G., *Calculatoare cu program și teoria programării*, Editura Științifică, București, 1972.

21. TEODORESCU N., *Calcul numeric și grafic*, Institutul Politehnic, București, 1951.
22. TODOR I., *Elemente de analiză numerică*, vol. I, curs litografiat de C.S.C.A.S.
23. TOMESCU I., *Articolele din Gazeta Matematică*, seria A, nr. 3—6, București, 1971.
24. VĂCARU V., VILCEANU S., *Calculatorul electronic — unealta secolului XX, Viitorul informaticii*, Editura Academiei R. S. România, București, 1970.
25. ALEF₀, ALGEBRA, *Numere reale, calcul numeric, numere complexe*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1974.



